М. Орынбасаров
Ш. Сахаев

МАТЕМАТИКАЛЫҚ ФИЗИКА ТЕҢДЕУЛЕРІНІҢ ЕСЕПТЕРІ МЕН ЖАТТЫҒУЛАР ЖИНАҒЫ

ОҚУ ҚҰРАЛЫ

Алматы 2003

ӘЛ-ФАРАБИ атындағы
ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

М. Орынбасаров
Ш. Сахаев

МАТЕМАТИКАЛЫҚ ФИЗИКА ТЕҢДЕУЛЕРІНІҢ ЕСЕПТЕРІ МЕН ЖАТТЫҒУЛАР ЖИНАҒЫ

Оқу құралы

Алматы
"Қазақ университеті"
2003

ББК 22я7
О 65

Баспаға әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті механика-математика факультетінің Ғылыми кеңесі және Редакциялық-баспа кеңесі ұсынған

Пікір жазғандар:

физика-математика ғылымдарының докторы,
профессор *М. А. Абдрахманов*;
физика-математика ғылымдарының докторы,
профессор *М. Т. Дженалиев*;
физика-математика ғылымдарының кандидаты,
профессор *Ж. А. Токыбетов*

Орынбасаров М., Сахаев Ш.
О 65 Математикалық физика теңдеулерінің есептері мен жаттығулар жинағы: Оқу құралы. - Алматы: Қазақ университеті, 2003. - 190б.
ISBN 9965-12-268-7

Оқу құралының мазмұны авторлардың көп жылдар бойы ҚазҰУ, АМУ т.б. жоғары оқу орындарында оқыған дәрістеріне негізделген. Оқу құралында математикалық физика теңдеулерінің негізгі теорияларына қысқаша түсініктер мен мысалдар келтіріп, студенттердің өздері шешетін есептер мен жаттығулар берілді.

Оқу құралы тек математиктерге ғана емес, математиканы пайдаланатын және қолданатын мамандарға (физиктер, инженерлер және т.б.) арналған.

О $\frac{4310020000-399}{460(05)-03}$ 147-02 ББК 22я7

ISBN 9965-12-268-7

МАЗМҰНЫ

АЛҒЫ СӨЗ

Математикалық физиканың теңдеулер пәні ғылыми зерттеу және қолданбалы математикада көптен пайдаланатындықтан негізгі пән ретінде университеттерде, жоғары техникалық оқу жүйелерінде оқытылады. Ұсынылып отырған оқулықта математикалық физиканың есептері мен жаттығуларын шешудің негізгі әдістері: сипаттаушылық, айнымалыларды ажыратып шешетін - Фурье, интегралдық түрлендіру, Грин функциясын құру және потенциалды құрып шешу мәселелерін талдап, осы әдістерді пайдаланып шешілген мысалдар келтірілген. Келтірілген тәсілдермен шешілетін есептер мен жаттығулар ұсынылған.

Оқулық өзінше ерекшелікте жазылған, кейбір тараулары кеңейтілген және жаңа әдістермен толықтырылған себебі көлемі мен мазмұны жөнінен жоғары оқу орындарындағы осы пәнге арналған негізгі лекциялық оқулықтарға сәйкес оқу құралы ретінде пайдалануды мақсат етіп ұсынып отырмыз. Оның үстіне арнайы тараумен бірінші ретті дербес туындылы сызықтық теңдеулер мен теңдеулер жүйесі үшін есептер келтірдік, себебі бұл бөлік жай дифференциалдық теңдеулер пәнінде көбінше берілмей қалады. Бұл бірінші ретті теңдеулер, әдетте, табиғи құбылыстарды өрнектейді, сондықтан олар қолданбалы математикада жиі қолданылады.

Авторлар осы оқулықты компьютерлік теруде және кеткен кейбір қателіктерді түзеуде үлкен еңбек сіңірген кафедра аспиранты А. Г. Бапаховаға шын жүректен алғысын айтады.

І тарау. ЖАЛПЫ БӨЛІМ

Негізгі ұғымдар. Дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерді кластарға бөлу және канондық түрге келтіру

§1. Негізгі ұғымдар мен анықтамалар

1. Негізгі ұғымдар.

R^n - Евклид кеңістігі, нүкте $x=(x_1,x_2,...x_n)\in\Omega$ - шектелген аймақта. Белгісіз функция $u=u(x)=u(x_1,x_2,...x_n)$ сол аймақта дифференциалданады, оның туындыларын

$$Du=u_{x_j}=\frac{\partial u(x)}{\partial x_j},$$

$$D^2u=u_{x_ix_j}=\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i\partial x_j},...,D^k u=\frac{\partial^{|k|}u(x)}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}...\partial x_n^{k_n}}$$

түрінде белгілейік.

1-анықтама. Көп аргументті белгісіз $u(x)=u(x_1,x_2,...x_n)$ функция және оның туындыларын байланыстыратын теңдеуді *дербес туындылы дифференциалдық теңдеу* деп атайды, оның жалпы түрі

$$F(x,u(x),Du,....,D^k u,...)=0,\quad k=1,2,...,m, \qquad (1.1)$$

мұнда $D^m u(x)$ бойынша туындылардың ең болмағанда біреуі нөлге тең емес:

$$\frac{\partial F}{\partial(D^m u)}\neq 0,\ \sum_{i=1}^{n}\kappa_i=m$$

2-анықтама. Дифференциалдық теңдеудегі туындылардың ең үлкен реті m, осы теңдеудің *реті* деп аталады.

3-анықтама. Егер $\overline{F}=(F_1,F_2,...,F_N)$ -N өлшемді, ал $\overline{u}=(u_1,u_2,...u_m)$ -m өлшемді векторлар болса, онда (1.1)- *дербес туындылы теңдеулер жүйесі* деп аталады.

4-анықтама. Функция $u(x) \in C^m(\Omega)$ және (1.1) теңдеуді қанағаттандырса, онда ол функцияны (1.1) теңдеудің *регулярлық шешімі* деп айтады.

Дифференциалдық теңдеудің регулярлық шешімдерімен қатар регулярлы емес (ерекше нүктелері бар) шешімдері және жеткілікті ретті дифференциалданбайтын (жалпылама) шешімдері болады.

Мысалы, ерекше нүктелері бар шешімдерге іргелі (фундаменталдық) шешімдер жатады.

Қолданбалы математика мен техникада кездесетін дифференциалдық теңдеулердің шешімдері шексіз көп (шешімдер жиыны түрінде). Бірақта нақты шешімдері жоқ немесе жалғыз болатын дифференциал теңдеулер кездеседі.

Мысалы: мына $u_x^2 + u_y^2 + u^2 = 0$ теңдеудің нөлден басқа шешімі жоқ, ал мына $u_x^2 + u_y^2 + 1 = 0$ теңдеудің нақты шешімі жоқ.

2. Дифференциалдық теңдеуді кластарға бөлу

5-анықтама. Егер (1.1) − теңдеудегі функция F барлық $D^k u$, $0 \le k \le m$ туындыларға сызықты тәуелді болса, онда (1.1) теңдеуді *сызықтық дифференциал теңдеу* деп атайды.

Мысалы, екінші ретті дербес туындылы сызықты дифференциалдық теңдеу мына түрде

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u(x) = f(x) \qquad (1.2)$$

жазылады, мұндағы $a_{ij}(x), b_i(x), c(x)$-коэффициенттері мен $f(x)$-бос мүше $\Omega \in R^n$ аймақта анықталған белгілі нақты функциялар.

Егер теңдеудегі коэффициенттер тұрақты сандар болса, онда (1.2) - *тұрақты коэффициентті сызықты дифференциалдық теңдеу* деп аталады.

Егерде $f \equiv 0$ болса, онда (1.2)-теңдеуді *біртектес*, ал $f \ne 0$ болса, *біртектес емес* деп айтады.

6-анықтама. Егерде (1.2)-теңдеудің $a_{ij}(x)$ коэффициенттері мен бос мүше белгісіз *u(x)* пен оның бірінші ретті туындыларына тәуелді болса, яғни (1.2)-теңдеу мына түрде

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,u,\ldots,u_x,\ldots)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = F(x,u,u_x,\ldots) \qquad (1.3)$$

болса, онда (1.3) теңдеуді *квазисызықтық* деп атайды.

7-анықтама. Егерде (1.3)-теңдеудің коэффициенттері $a_{ij}(x)$ болса, онда оны жоғары ретті туындыларына салыстырғанда *сызықты* немесе *жартылай сызықты* деп айтады.

Қалған жағдайларда теңдеулер *сызықсыз* деп аталады.

Төмендегі теңдіктердің қайсысы дифференциалдық теңдеу және ретін анықтаңдар:

1. $2u_{xy} + \frac{\partial}{\partial x}(u_x - 2u_y) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3u + 7 = 0$.

2. $u_{yy} + u_{xx} - \frac{\partial}{\partial y}(u_x + u_y) - \frac{\partial}{\partial x}(u_x - u_y) + 70 = 0$.

3. $5\sin^2 u_{xy} - 3\cos^2 u_{xy} + 3\cos 2u_{xy} - 2\frac{tg^2 u_{xy}}{1 + tg^2 u_{xy}} + 5 = 0$

4. $u_{yy} + u_{xx} - \frac{\partial}{\partial y}(u_x + u_y) + \frac{\partial}{\partial x}(u_y - u_x) + u = 0$.

5. $-2\cos^2 u_{xx} + 15\sin u_x^2 + \cos 2u_{xx} + 3u_y - u = 0$.

6. $\frac{\partial}{\partial y} ctg\, u_x + cosec\, u_x - 2u_{xy} + 2\frac{\partial}{\partial x}(u + u_y) - 5u = 0$.

7. $\frac{\partial}{\partial y}(u_{xx}^2 + 3u_x) - 2u_{xx}\frac{\partial}{\partial x}(u_{xy} - u_x) - 2u_{xx}^2 - 3u_{xy} + u = 0$.

Қайсысы сызықтық (біртектес, біртектес емес), квазисызықты және сызықты емес:

8. $\dfrac{\partial}{\partial x}(u_x^2+u_y^2)-\dfrac{\partial}{\partial y}(u_x+u_y)+\dfrac{\partial}{\partial x}(u^2+x^2y^2)=0.$

9. $\dfrac{\partial}{\partial y}(u_x+2yu_y)-\dfrac{\partial}{\partial x}(u_y+2xu_x)+u_x^2+uu_y=0.$

10. $\dfrac{\partial}{\partial x}(3u_x-yu_y)+\dfrac{\partial}{\partial y}(yu_x-u)+u_y-4u+\sin x=0.$

§2. Математикалық физиканың кейбір теңдеулерін қорыту және оларға есеп қою

Физика, техника, биология тағы басқа ғылымдардың күрделі проблемалары мен табиғаттағы түрліше физико-химиялық құбылыстарды математика әдістерімен зерттеу көп жағдайды дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерді шешуге алып келеді.

Олардың ең қарапайымдарын келтірейік:

1^0. Толқынның теңдеуі:

$$u_{tt}=a^2\Delta u+F(x,y,z,t),$$

мұндағы а - тұрақты толқынның жылдамдығы, $\Delta u=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}$ - *Лаплас операторы* деп аталады.

2^0. Жылуөткізгіштік теңдеуі:

$$u_t=a^2\Delta u+F(x,y,z,t),$$

мұндағы $a^2=\dfrac{k}{c\rho}$, k - ортаның ішкі жылуөткізгіш коэффициенті, с - жылу сиымдылығы, ρ -тығыздық.

3^0. Лаплас теңдеуі $\Delta u=0$, Пуассон теңдеуі $\Delta u=f(x,y,z)$,

Гельмгольц теңдеуі $\Delta u+\chi^2u=f(x,y,z)$, χ -тұрақты.

Бұлар математикалық физиканың негізгі теңдеулері.

Математикалық физика әдістерін қолдану үшін зерттейтін құбылысты анықтайтын шамаларды таңдап, сонан соң физика-химиялық заңдылықтар мен қағидаларды пайдаланып, белгісіздер мен белгілі шамаларды байланыстыратын теңдеулер немесе теңдеу жүйесін құрады.

Әдетте дифференциалдық теңдеулердің шешімдері көп болады. Солардың ішінен қажетті жалғыз шешімін таңдап алу үшін қосымша шарттар (бастапқы, шекара, түйіндес, периодты, т.б.) белгілі заңдар негізінде қорытылады.

Дербес туындылы дифференциалдық теңдеуді алуға бірнеше мысалдар келтірейік:

1.Идеал сұйықтық ағысының теңдеуі

Сұйықтың ағысын сипаттайтын негізгі шамалар: жылдамдық $\overline{v} = \{v_1, v_2, v_3\}$, оның тығыздығы $\rho(x,y,z,t)$ және сұйықты қозғайтын күштің интенсивтігі $f(x,y,z,t)$. Ағынның теңдеуін қорыту үшін шекарасы S көлемі Ω сұйықтың бөлігін қарастырайық. Ω -көлемдегі сұйықтың массасының бірлік уақытта өзгеру шамасы

$$Q = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega}\rho(x,y,z,t)dxdydz = \int_{\Omega}\frac{\partial\rho(x,y,z,t)}{\partial t}dxdydz.$$

Сұйық көзінің әсерінен Ω көлемдегі сұйықтың массасы

$$Q_1 = \int_{\Omega} f(x,y,z,t)dxdydz$$

шамаға артады, ал S –бетінен өтетін сұйық шамасы

$$Q_2 = \int_{S}\rho(\overline{v},\overline{N})dS = \int_{\Omega} div(\rho\overline{v})dxdydz.$$

Массаның сақталу заңдылығы бойынша

$$Q = Q_1 - Q_2$$

болғандықтан

$$\int_{\Omega}\frac{\partial\rho(x,y,z,t)}{\partial t}dxdydz = \int_{\Omega} f(x,y,z,t)dxdydz - \int_{\Omega} div(\rho\overline{v})dxdydz \qquad (1.4)$$

теңдік орынды. Аймақ Ω-кез келген екенін ескеріп, (1.4) теңдіктен мына теңдеуді

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div(\rho\overline{v}) = f(x,y,z,t) \qquad (1.5)$$

аламыз. (1.5) сұйықтың ағысының *үзіліссіздік теңдеуі* деп аталады.

Егер қарастырылған сұйық сығылмайтын болса, онда $\rho = \rho_0 = const$. Сондықтан сығылмайтын сұйықтар үшін үзіліссіздік теңдеу

$$\rho_0 div\, \bar{v} = f(x,y,z). \qquad (1.6)$$

Потенциалдық ағыс үшін $\bar{v} = grad\, u$, мұндағы u – жылдамдық потенциалы үшін

$$\rho_0 div(grad\, u) = f(x,y,z)$$

теңдеу орынды. Немесе $div(grad\, u) \equiv \Delta u$ болғандықтан потенциал $u(x,y,z)$

$$\Delta u = \frac{1}{\rho} f(x,y,z) \qquad (1.7)$$

Пуассон теңдеуінің шешімі.

Сұйықты қозғайтын күш жоқ болса, онда потенциал $u(x,y,z)$ мына

$$\Delta u = 0 \qquad (1.8)$$

Лаплас теңдеуін қанағаттандырады.

Теңдеулер (1.7) мен (1.8) стационарлық процесті өрнектейді. Сондықтан бастапқы шарттар қойылмайды. Ал шекаралық шарттар есептің мағынасына сәйкес алынады.

Мысал ретінде шексіздіктегі жылдамдығы v_0, сұйықты қозғайтын күші жоқ біртекті сығылмайтын сұйықтың шекарасы S қатты денені орай потенциалдық ағысын зерттейік. Жоғарыдағы талдау бойынша сығылмайтын сұйықтың ағысының потенциалы (1.8) теңдеудің мына шекаралық шарттарды

$$u_N\big|_S = (\bar{u}, \bar{N})\big|_S = \frac{\partial u}{\partial N}\bigg|_S = 0, \qquad (1.9)$$

$$\lim_{|r|\to\infty} grad\, u = v_0 \qquad (1.10)$$

қанағаттандыратын есепті шешуге алып келеді.

2. Шектің көлденең тербелісінің теңдеуі

Шек деп солқылдақ серпімді жіңішке жіпті айтамыз. Солқылдақтығы- июге қарсы күш жоқ, ал серпімділігі керілу күші $T(x)$ шектің профиліне жанама бойынша бағытталған.

Шектің көлденең қозғалуы аз, яғни ұзындығына қарағанда көлденең ауытқуы өте аз тербелісті қарастырайық.

Шек тыныштық қалпында OX өсінің бойында керілген, оның сызықтық тығыздығы $\rho(x)$ болсын. Сыртқы $p(x,t)$ күштің әсерінен шек тыныш қалпынан көлденең ауытқиды. Оның t мезетте x нүктесіндегі ауытқуы $u(x,t)$ болсын. Шектің тербелісінің теңдеуін қорыту үшін кез келген x_1 мен x_2 нүктелерінің арасындағы болігіне әсер ететін күштердің шамаларын есептейік.

Біріншіден $[x_1, x_2]$ кесіндіге әсер ететін u өсіне бағыттас сыртқы күш

$$F_1 = \int_{x_1}^{x_2} p(x,t)dx .$$

Шектің ауытқуы $u(x,t)$ аз болса, онда $u^2(x,t)$, $u_x^2(x,t)$, $u(x,t)u_x(x,t)$ жоғарғы ретті аз шамалар. Сондықтан теңдеуді қорытқанда жоғарғы ретті аз шамаларды ескермеуге болады, яғни бірінші ретті дәлдікпен оларды нөлге тең деп аламыз.

Шектің t мезеттегі профиле $u = u(x,t)$ болғандықтан x_1 мен x_2 нүктелерінің аралығындағы доғаның ұзындығы

$$S = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+u_x^2}dx \approx x_2 - x_1 .$$

x_1 мен x_2 нүктелер аралығындағы шектің ұзындығы өзгермейді, олай болса Гук заңы бойынша керу күші t мен x айнымалыларға тәуелсіз, яғни $T = T_0 = const$. Керу күшінің x_1 мен x_2 аралығына әсерінің u мен x өстеріндегі проекцияларын есептейік.

Егер $\alpha(x)$ профиль $u = u(x,t)$ нүкте x жүргізілген жанаманың x өсімен жасайтын бұрышы болса, онда күштің вертикаль бағыттағы проекциясы

$$F_2 = T_0 \sin\alpha(x_2) - T_0 \sin\alpha(x_1) =$$

$$T_0 \left.\frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg\alpha}}\right|_{x_2} - T_0 \left.\frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg\alpha}}\right|_{x_1} =$$

$$= T_0 \left.\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}}\right|_{x_2} - T_0 \left.\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}}\right|_{x_1} \approx T_0 \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_2} - T_0 \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_1} =$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x}\left(T_0 \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx \,,$$

ал күштің x өсіне түсірілген проекциясы

$$F_3 = T_0 cos\,\alpha(x_2) - T_0\, cos\,\alpha(x_1) =$$

$$T_0 \left.\frac{1}{\sqrt{1+u_x^2}}\right|_{x_2} - T_0 \left.\frac{1}{\sqrt{1+u_x^2}}\right|_{x_1} = 0\,.$$

Демек көлбеу ауытқу болмайды.

Енді инерциялық күшті есептейік. Тығыздығы $\rho(x)$, үдеуі u_{tt} болғандықтан Ньютонның бірінші заңы бойынша x_1 мен x_2 нүктелердің арасындағы бөліктің инерциялық күші

$$F_4 = -\int_{x_1}^{x_2} \rho(x) u_{tt} dx\,.$$

Даламбер қағидасы бойынша күштердің u бағытындағы проекцияларының қосындысы нөлге тең болу керек:

$$F_1 + F_2 + F_4 = 0$$

немесе

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p(x,t) - \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right] dx = 0\,, \qquad (1.11)$$

мұндағы x_1 мен x_2 кез келген нүктелер екенін ескерсек, онда (1.11) теңдіктен тербеліс теңдеуін

$$\rho(x) u_{tt} = T_0 u_{xx} + p(x,t) \qquad (1.12)$$

аламыз. (1.12) шектің еріксіз тербеліс теңдеуі деп аталады.

Егер $p(x,t) \equiv 0$, $\rho = \rho_0$ болса, онда біртекті шектің еркін тербелісінің теңдеуі

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \ a^2 = \frac{T_0}{\rho_0} \qquad (1.13)$$

алынады.

Қорытылған (1.12) мен (1.13) теңдеулердің жалғыз шешімдерін табу үшін бастапқы шарттар

$$u(x,0) = \varphi(x), \ u_t(\alpha,0) = \psi(x), \ 0 \le x \le l$$

шекаралары $x = 0$ мен $x = l$ нүктелерде орындалатын шекаралық шарттар беріледі.

Шекаралық шарттар түрліше болуы мүмкін. Ең қарапайымдары:

а) Егер шектің шекара нүктелері $x = 0$ мен $x = l$ қатты бекітілсе, онда

$$u(x,t)\big|_{x=0} = 0, \ u(x,t)\big|_{x=l} = 0;$$

б) Егер шектің шекара нүктелері белгілі заңдылықпен қозғалатын болса, онда

$$u(x,t)\big|_{x=0} = \mu(t), \ u(x,t)\big|_{x=l} = \nu(t);$$

в) Егер шектің шекара нүктелеріне сәйкес $F(t)$ пен $\Phi(t)$ күштер әсер етсе, онда Гук заңы бойынша

$$-T\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0} = F(t), \ T\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l} = \Phi(t);$$

г) Егер шектің шекаралары серпімді бекітілсе, яғни серпімділік күш $-ku$ тең болса, онда Гук заңы бойынша

$$-T\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0} = -ku, \ T\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l} = -ku$$

немесе

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} - hu\right)\bigg|_{x=0} = 0, \ \left(\frac{\partial u}{\partial x} + hu\right)\bigg|_{x=l} = 0$$

шарттар орындалады.

3. Қатты денелердегі жылудың таралу теңдеуі

Егер қатты денелердің бөліктері түрліше дәрежеде қыздырылса, онда денеде жылу қозғалысы болады. Дененің $M(x,y,z)$ нүктесінде t мезеттегі температурасы $u(x,y,z,t)$, тығыздығы $\rho(x,y,z)$, жылу сиымдылығы $c(x,y,z)$ және ішкі жылу өткізгіштігі $k(x,y,z)$ болсын. Жылудың таралу құбылысының теңдеуін алу үшін Фурье заңын пайдаланамыз. Фурье заңы бойынша жылудың N бағытымен өтетін ағыны

$$q = -k\, grad_N u \text{, немесе } q = -k\frac{\partial u}{\partial N}$$

теңдікпен анықталады.

Дененің S бетімен шектелген Ω бөлігін қарастырайық. Ал $f(x,y,z,t)$ ішкі жылу көзінің тығыздығы болсын. Онда t_1 мен t_2 уақыт аралығында Ω аймақта жылу мөлшері

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_{\Omega} f(x,y,z,t)dv$$

шамаға артады.

Ал S беті арқылы өтетін жылудың мөлшері Фурье заңы бойынша

$$Q_2 = \int_{t_1}^{t_2} dt \iint_{S} k(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial N}ds\,,$$

мұндағы $\bar{N}$-вектор S бетіне тұрғызылған сыртқы нормал. Енді Ω бөлігінің температурасы $\Delta u = u(x,y,z,t_2) - u(x,y,z,t_1)$ шамаға өсуі үшін қажетті жылу мөлшері

$$Q_3 = \iiint_{\Omega} c\rho\,\Delta u\,dv = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_{\Omega} c\rho\frac{\partial u}{\partial t}dv$$

болады.

Ал энергияның сақталу заңы бойынша

$$Q_1 + Q_2 = Q_3 .$$

Сондықтан

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_{\Omega} c\rho\frac{\partial u}{\partial t}dv = \int_{t_1}^{t_2} dt \iint_{S} k\frac{\partial u}{\partial N}dS + \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_{\Omega} f(x,y,z,t)dv\,, \quad (1.14)$$

Остроградский формулалары бойынша

$$\iint_S k\frac{\partial u}{\partial N}dS = \iiint_\Omega div((k\nabla u)dv$$

болғандықтан (1.14) теңдіктен

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_\Omega \left[c\rho\frac{\partial u}{\partial t} - div(k\nabla u) - f \right] dv = 0 \qquad (1.15)$$

өрнегін аламыз.

Дененің Ω аймағы және t_1 мен t_2 уақыттар кез келген болғандықтан (1.15) өрнектен

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = div(k\nabla u) + f(x,y,z,t) \qquad (1.16)$$

теңдеуін аламыз. Оны *жылу өткізгіштік теңдеуі* деп атайды.

Жылуөткізгіштік теңдеу (1.16) жалғыз шешімін табу үшін қойылатын қосымша шарттар.

Егерде аймақ $\Omega \equiv R^3$ шексіз болса, онда негізінде, тек бастапқы шарт

$$u(x,y,z,0) = f(x,y,z) \qquad (1.17)$$

беріледі. Оған қоса белгісіз функцияның физикалық мәні мен шешу әдістеріне сәйкес

$(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \to \infty, \quad u(x,y,z,t) \to 0$ шектелген немесе өсуіне шектеулер т.б. шарттар қойылуы мүмкін.

Анықтама. Теңдеу (1.16) мен алғашқы шарт (1.17) қанағаттандыратын шешімін табу есебін - *Коши есебі* деп айтады.

Егер шектелген аймақтың шекарасы S болса, онда (1.17) бастапқы шартпен қатар S бетте түрліше шекаралық шарттар беріледі. Олардың ең қарапайымдарын келтірейік:

1) Дененің S бетіндегі температура белгілі болса,онда

$$u(x,y,z,t)\big|_S = \varphi(x^0,y^0,z^0,t),\ (x^0,y^0,z^0) \in S; \qquad (1.18)$$

2) S бетіне өтетін жылу ағынының шамасы белгілі болса, онда Фурье заңы бойынша

$$q = -k\frac{\partial u}{\partial N}\bigg|_S, \text{ бұдан}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_S = -\frac{1}{k} q(x^0, y^0, z^0) = \psi(x^0, y^0, z^0, t); \qquad (1.19)$$

3) Дене температурасы $u_0(x, y, z, t)$ сыртқы ортамен жылу алмасса, онда Ньютон заңы бойынша $q = H(u - u_0)$, ал Фурье заңымен $q = -k\frac{\partial u}{\partial N}$ болғандықтан $q = -k\left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_S = H(u - u_0)|_S$ өрнегін аламыз. Осыдан шекарада

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial N} + hu\right)\right|_S = \chi(x^0, y^0, z^0, t), \; h = \frac{H}{k}, \; \chi = \frac{H}{k} u_0 \qquad (1.20)$$

шарты орынды;

4) Егер дененің беті, жылу сиымдылығы C_1 жұқа қабатпен қоршалған болса, онда S шекарада

$$C_1 \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_S = k\left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_S - H(u - u_0)|_S \qquad (1.21)$$

теңдігі орындалады;

5) Егер дене Ω түрліше екі бөліктерден құралған, ал бөліктердің түйісу беттері L болса, онда L бетте мынадай қосымша шарттар орындалады

$$u_1|_L = u_2|_L, \; k_1\left.\frac{\partial u_1}{\partial N}\right|_L = k_2\left.\frac{\partial u_2}{\partial N}\right|_L \qquad (1.22)$$

немесе $$-k_2\left.\frac{\partial u_1}{\partial N}\right|_L = H(u_1 - u_2),$$

$$-k_1\left.\frac{\partial u_2}{\partial N}\right|_L = H(u_1 - u_2). \qquad (1.23)$$

Соңғы (1.22) мен (1.23) теңдіктер *түйіндес шарттар* деп аталады.

(1.18), (1.19), (1.20) шарттар сәйкес түрде *бірінші, екінші, үшінші шекаралық шарттар* деп аталады.

Анықтама. (1.16) теңдеуден, бастапқы шарт (1.17) және шекаралық шарттарды (1.18), (1.19), (1.20) қанағаттандыратын шешімін табу есептерін сәйкес түрде: бірінші (Дирихле), екінші (Нейман), үшінші (Робэн) шекаралық есептері деп аталады.

Егерде заттың ағыны туралы $q = -D\dfrac{\partial C}{\partial N}$ Нернст заңын пайдалансақ, онда ерітінді мен газдағы заттың концентрациясын анықтайтын диффузия теңдеуі (1.16) түрінде жазылады, мұндағы D-диффузия коэффициенті, C-ерітіндінің концентрациясы.

Міне, осылай талдау арқылы төмендегі физикалық есептердің теңдеулерін қорытып және Коши есебі мен шекаралық есептерді қойыңдар.

1^0 Толқын теңдеуіне қойылатын есептер

11. $x_i\ (0 < x_i < l), i = 1,2,...n$ нүктелерде бекітілген m_i массалары бар шектің көлденең тербелісінің теңдеуін қорытыңдар.
12. Кедергі күші ауытқуға пропорционал ортадағы ұзындығы l шектің көлденең тербелісінің теңдеуін қорытыңдар.
13. Ұзындығы l, бір жағы ашық цилиндр идеал газбен толтырылған. Цилиндр өз өсі бағытында тұрақты V жылдамдықпен қозғалып, $t = 0$ мезетте тоқталады. Цилиндр ішіндегі газдың жабық шетінен x қашықтықта ауытқуын анықтайтын есепті қойыңдар.
14. Кедергі күші ауытқудың жылдамдығына пропорционал ортадағы ұзындығы l, шеткі нүктелері бекілген, шектің аз көлденең тербелісін анықтайтын есепті қойыңдар.
15. Шексіз біртекті шектің $x = 0$ нүктесінде шоғырланған m_0 масса бекітілген. Шектің бастапқы бірқалыпты жағдайдан ауытқуын анықтайтын есепті қойыңдар, егерде:

а) $t = 0$ мезеттен бастап массаға $F_0\ sin\,\omega t$ күш әсер етсе;

б) $t = 0$ мезетте массаға көлденең бағытта импулсі P_0 берілсе.

16. Идеалданған газбен толтырылған жартылай шексіз цилиндр құбырдың бір шетінде еркін қозғалатын M массалы поршен бар. Бастапқы $t = 0$ мезетте поршенге V_0 жылдамдық беріледі. Толқынның газда таралуын анықтайтын есепті қойыңдар.

17. Ұзындығы l шектің $x = c$ нүктеде массасы m_0 шарик бар. Шектің бастапқы ауытқуы мен жылдамдығы белгілі. Шектің көлденең тербелісін анықтайтын шекаралық есепті қойыңдар, егерде:

а) Шекара нүктелері бекітілген;

б) Шеткі нүктелері бос;

в) Шеткі нүктелеріне $t = 0$ мезеттен бастап $\overline{F_1}(t)$ мен $\overline{F_2}(t)$ күштер әсер етеді;

г) Шеткі нүктелердің біреуі бос, ал екіншісі серпімді бекітілген;

д) Бір шеткі нүкте белгілі заңдылықпен қозғалады, ал екіншісіне $\overline{F}(t)$ күші әсер етеді.

18. Біртекті, көлденең қимасының ауданы $S(x)$ серпімді стерженнің бойлық тербелісінің теңдеуін құрыңдар.

19. Біртекті, ұзындығы l серпімді стерженнің бір шеті бекітілген, екінші шетіне ауытқу жылдамдығына пропорционал кедергі күш әсер етеді. Серпімді стерженнің бойлық аз тербелісін анықтайтын есепті қойыңдар.

20. Ұзындығы l, біртекті көлденең қимасының ауданы $S(x)$ серпімді стерженнің бойлық тербелісін анықтайтын есепті қойыңдар, егерде:

а) стержен табандарының радиустары r мен R болған қиық конус түрінде, бір шеті бекітілген, ал екіншісіне бойлық $\overline{F}(t)$ күші әсер етеді;

б) стержен табан қабырғалары а және в дұрыс қиық төртбұрышты пирамида түрінде, бір шеті серпімді бекітілген, ал екіншісіне бойлық $\overline{F}(t)$ күші әсер етсе.

21. Кедергі күші ауытқу жылдамдығына пропорционал ортада біртекті мембрананың сыртқы көлденең күштің әсерінен тербеліс теңдеуін құрыңдар.

22. Бастапқы ауытқуы мен жылдамдығы белгілі, біртекті төрт бұрышты $(0 < x < l, 0 < y < q)$ мембрананың еркін тербелісін анықтайтын есепті қойыңдар, егерде:

а) Барлық шекарасы бекітілген болса;

б) Барлық шекарасы бос болса;

в) Шекарасы $x = 0, y = 0$ бос, ал шекаралары $x = p, y = q$ белгілі заңдылықпен қозғалса;

г) Шекаралары $y = 0, y = q$ бос, шекарасы $x = 0$ серпімді бекітілген, ал $x = p$ шекарасына көлденең $\Phi(y,t)$ күш әсер етсе;

д) шекаралары $x = 0, y = 0$ бекітілген, ал $x = p, y = q$ шекараларына көлденең $\Phi_1(y,t)$ және $\Phi_2(y,t)$ күштер әсер етсе.

23. Өткізгіштегі электрлік тербеліс теңдеулерін құрыңдар.

24. Ұзындығы l өткізгіштің бастапқы $t = 0$ мезетте ток пен кернеуіне сәйкес түрде $\varphi(x)$ және $\psi(x)$. Өткізгіштегі $t > 0$ уақыттағы электрлік тербелісті (ток пен кернеуді) анықтайтын есепті қойыңдар, егерде:

а) Бір шеті $x = 0$ жерге қосылған, $x = l$ шетіне электр қозғаушы күш $E(t)$ әсер етсе;

б) Шеткі $x = 0$ және $x = l$ нүктелерде сәйкес түрде шоғырланған сиымдылық C_0 пен C_1 арқылы жерге қосылса;

в) Шеткі $x = 0$ нүктеге э.қ.к. $E(t)$ әсер етіп, ал $x = l$ нүктеде өзіндік индукция L_0 арқылы жерге қосылса.

г) Шеткі $x = 0$ нүкте өзіндік индукция L_0 арқылы жерге қосылып, ал $x = l$ нүктеде кедергі R_0 э.қ.к $E(t)$ әсер етсе.

25. Ұзындығы l потенциалы V_0 кабелдің бір шеті изоляцияланған, ал шоғырланған сиымдылығы бар екінші шеті жерге қосылған. Өткізгіштегі токты анықтайтын есепті қою керек.

2^0 Жылуөткізгіштік теңдеуге қойылатын есептер

26. Сұйықтар мен газдардағы диффузия теңдеуін қорытындар.
27. Бастапқы температурасы $f(x)$, ұзындығы l стерженнің бір шеті $x=0$ нүктеде тұрақты T_0 температурада болады, ал бүйір беті мен екінші шеті $x=l$ нүктеде температурасы u_0 ортамен Ньютон заңы бойынша жылу алмасады. Стерженнің температурасын $t>0$ мәндерінде анықтайтын есепті қойындар.
28. Шексіз жіңішке біртекті стержен бойымен оң бағытта $t=0$ мезеттен бастап минутына q- мөлшері жылу нүктесі v_0 жылдамдықпен қозғалады. Стерженнің бастапқы температурасы белгілі, жылудың таралуын анықтайтын есепті қойындар.
29. Бастапқы температурасы белгілі, радиусы R жіңішке, біртекті сақинаның бүйір беті температурасы u_0 ортамен жылу алмасады. Сақинаның температурасын анықтайтын есепті қойындар.
30. Тік цилиндрлік ыдыстағы ерітінді концентрациясы тек биіктік пен уақытқа тәуелді және зат бөліктерінің ауырлық салмағының әсерінен тұрақты жылдамдықпен түнитынын ескеріп, ерітіндінің концентрациясын анықтайтын есепті қойындар, егерде ыдыстың түбінде өткізбейтіндік шарты берілсе.
31. Шексіз жіңішке стержен жуандықтары бірдей әртүрлі екі бөліктен тұрады. Әрбір бөлігінің бастапқы температуралары белгілі, бүйір беті изоляцияланған. Шексіз стерженнің бойында $t>0$ уақыттарда жылудың таралуын анықтайтын есепті қою керек.
32. Бүйір беті изоцияланған, шектелген стержен жуандықтары бірдей, құрамы әртүрлі екі бөліктен

тұрады. Бөліктердің бастапқы және бір шетінің температуралары белгілі, ал екінші шетінің температурасы u_0 ортамен жылу алмасады. Стерженде жылудың таралуын анықтайтын есепті қойыңдар.

33. Ұзындығы l түтіктің бір бөлігінде $(0 < x < h)$ концентрациясы c_0 ерітілген сұйық, ал екінші бөлігінде $(h < x < l)$ еріткіш бар. Түтіктің табандары бекітілген. Ортадағы кедергі алынған соң, сұйықтың концентрациясын анықтайтын есепті қойыңдар.

34. Біртекті, радиусы R шардың бастапқы температурасы T_0. Шарда жылудың таралуын анықтайтын есептерді қойыңдар, егерде

а) Шардың беті изоляцияланған, шардың ішінде химиялық реакция негізінде температураға пропорционал мөлшерде жылу жойылатын болса;

б) Шардың ішінде қуаты тұрақты Q жылу көзі болса, ал шардың беті температурасы нөлге тең ортамен жылу алмасса.

35. Радиусы R - шексіз цилиндрдің бастапқы температурасы $f(r)$, ал бүйір бетінің температурасы тұрақты T_0. Цилиндрдің ішінде жылудың таралуын анықтайтын есепті қойыңдар.

36. Концентралық радиустары R және $2R$ сфералармен қоршалған қатты дененің бастапқы температурасы $f(r,\theta,\varphi)$ ішкі бетінен денеге жылу өтпейді, ал сыртқы бетінің температурасы $Q(r,\theta,\varphi,t)$ ортада суылады. Денеде жылудың таралуын анықтайтын есепті қойыңдар.

37. Жұқа біртекті төртбұрышты пластинаның бастапқы $0 < x < l, 0 < y < h$ температурасы $f(x,y)$. Жылудың таралуын анықтайтын есепті қойыңдар, егерде

а) Бүйір қабырғалары $x = 0$ мен $x = l$ температурасы тұрақты T_0, ал табандары $y = 0$ пен $y = p$ жылу өтпейтіндей изоляцияланса;

б) Қабырғалары $x=0$ мен $y=0$ температурасы u_0 ортамен жылу алмасады, ал $x=p$ мен $y=h$ қабырғаларына сәйкес q_1 мен q_2 жылу ағындары берілсе;

в) Қабырғалары $x=0$ мен $x=l$ жылу өтпейтіндей изоляцияланған, $y=0$ арқылы өтетін жылу ағыны q, ал $y=h$ қабырғасы температурасы u_0 ортамен жылу алмасса.

3^0 Лаплас және Пуассон теңдеулеріне қойылатын шекаралық есептер

38. Шекарасы тұйық қисық сызыққа S керілген жазық біртекті мембранаға көлденең тығызды $f(x,y)$ күш әсер етеді. Мембрананың тербелісін анықтайтын есепті қойыңдар, егерде

а) мембрана шекарасы бекітілсе;

б) мембрана шекарасы бос болса;

в) мембрана шекарасы серпімді бекітілсе;

г) мембрана шекарасына көлденең $F(x,y)$ күш әсер етсе;

д) мембрана шекарасы белгілі заңдылықпен қозғалса.

39. Биіктігі h табанының радиусы R дөңгелек цилиндр дененің табандарының температурасы $\varphi_0(x,y)$ және $\varphi_1(x,y)$ болсын. Цилиндрдің ішінде жылудың таралуын анықтайтын есептерді қойыңдар, егерде:

а) Бүйір бетіндегі жылу ағыны $q(z)$ белгілі болса;

б) Бүйір бетінің температурасы $T_0 = const$ болса;

в) Бүйір бетінің температурасы u_0 ортамен жылу алмасса.

40. Радиусы R жарты шардың табанының температурасы нөлге тең, ал сфералық беттің температурасы $f(\varphi,\theta)$ белгілі болса, онда жарты шардың ішкі нүктелерінің температурасын анықтайтын есепті қойыңдар.

41. Биіктігі h табанының радиусы R цилиндрдің ішінде тұрақты Q газ көзі бар және газдың бөлінуі концентрациясы u пропорционал орнықты емес газдың концентрациясын табатын шекаралық есепті қою керек, егерде

а) цилиндр табандарында $z=0$ мен $z=h$ газ концентрациясы нөлге тең болып, ал бүйір бетінен газ өтпейтін болса;

б) табандары $z=0, z=h$ концентрациясы нөлге тең ортамен диффузиялық алмасады, бүйір бетінің концентрациясы тұрақты c_0 болса.

42. Төртбұрышты $(0<x<l_1, 0<y<l_2)$ жұқа тіліктің екі қарама-қарсы қабырғаларының потенциалдары V_1 мен V_2. Төртбұрышта электростатикалық өріс потенциалының таралуын анықтайтын есепті қойыңдар, егерде

а) Қалған екі қабырғасы жерге қосылса;

б) Қалған екі қабырғасы изоляцияланса;

в) Бір қабырғасына э.қ.к. E беріліп, екіншісі изоляцияланса.

43. Биіктігі h, табанының радиусы R цилиндрдің бүйір бетінің потенциалы V_0, екі табаны жерге қосылған. Цилиндр ішінде электростатикалық өріс потенциалының таралуын анықтайтын есепті қойыңдар.

44. Радиусы R цилиндрдің бетінде токтың күші J, цилиндрдің ішінде және сыртында магниттік өріс потенциалдарын анықтайтын есепті қою керек.

§3. Дербес туындылы 2-ретті дифференциалдық теңдеу мен теңдеу жүйесін кластарға бөлу

Екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеудің жалпы түрі

$$F(x,u,...u_{x_i}...,...u_{x_i x_j},...)=0 \qquad (1.24)$$

өрнекпен жазылады. F функцияның $P_{ij}=u_{x_i x_j}$ бойынша туындыларын

$$A_{ij}=\frac{\partial F}{\partial P_{ij}}$$

деп белгілеп, мына сипаттаушы квадраттық форма

$$Q(\lambda_1,\lambda_2,...\lambda_n)=\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\lambda_i\lambda_j \qquad (1.25)$$

құрайық. Егерде (1.24) жоғары ретті туындылары бойынша сызықты теңдеу болса, яғни

$$F\equiv\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i x_j}+F_1(x,u,...u_{x_i},...)=0\,, \qquad (1.26)$$

онда сипаттаушы квадраттық форма (1.25) мына түрде

$$Q(\lambda_1,\lambda_2,...\lambda_n)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\lambda_i\lambda_j \qquad (1.27)$$

жазылады.

Белгілі әрбір тұрақты $x=x^0$ нүктеде квадраттық форма (1.27) ерекше емес аффиндік түрлендірумен

$$Q=\sum_{i=1}^{n} q_i\mu_i^2 \qquad (1.28)$$

канондық формаға келтіруге болады.

Анықтама. Егерде $\forall x\in\Omega$ нүктеде (1.28) канондық форманың коэффициенттері мына шарттарды қанағаттандырса:

а) $q_i\neq 0$ және барлығы бір таңбалы;

б) $q_i\neq 0$ және біреуі немесе бірнешеуі оң, қалғандары теріс;

c) q_i - біреуі немесе бірнешеуі нөлге тең, қалғандары бір таңбалы, онда Ω аймағында (1.26) теңдеуді сәйкес эллиптикалық, гиперболалық және параболалық типке жатады дейді. (1.24) сызықты емес дифференциалдық квадраттық форманы (1.25) пайдаланып осылай типтерге бөлуге болады. Бірақ квадраттық форма (1.25) коэффициенттері A_{ij} теңдеудің шешімдеріне тәуелді болғандықтан (1.24) теңдеудің типтерін шешімдеріне байланысты анықтайды.

Егерде $\overline{F} = (F_1, F_2, ..., F_m)$ -вектор, ал белгісіз $\overline{u} = (u_1, u_2, ..., u_m)$ –вектор болса, онда бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер жүйесінің жалпы түрі

$$F_i(x, u_1, u_2, ..., u_m, ..., \nabla u_1, \nabla u_2, ..., \nabla u_m) = 0, i = 1,2,...m \quad (1.29)$$

мұнда $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$ -Гамильтон операторы.

F_i функциялардың $P_{kj} = \frac{\partial u_k}{\partial x_j}$ аргументтері бойынша туындыларын A_{ik}^j белгілеп, мына сипаттаушы полиформа аламыз:

$$Q(\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n) = det \sum_{j=1}^{n} \left\| \frac{\partial F_i}{\partial P_{kj}} \right\| \lambda_j = det \sum_{j=1}^{n} \left\| A_{ik}^j \right\| \lambda_j \quad (1.30)$$

Екі белгісіз екі теңдеу үшін (1.30) квадраттық форма, оны

$$Q(\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n) = det \sum_{j=1}^{n} \begin{Vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial P_{1j}} & \frac{\partial F_1}{\partial P_{2j}} \\ \frac{\partial F_2}{\partial P_{1j}} & \frac{\partial F_2}{\partial P_{2j}} \end{Vmatrix} \lambda_j \quad (1.31)$$

түрінде жазуға болады.

Егерде (1.29) туындылары бойынша сызықты жүйе болса (n=2)

$$F_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_{x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} v_{x_j} + f_i(x,u,v),\ i=1,2$$

онда (1.31) сипаттаушы форма

$$Q = det\left[\begin{pmatrix} a_{11} & b_{11} \\ a_{21} & b_{21} \end{pmatrix}\lambda_1 + \begin{pmatrix} a_{12} & b_{12} \\ a_{22} & b_{22} \end{pmatrix}\lambda_2 + \ldots + \begin{pmatrix} a_{1n} & b_{1n} \\ a_{2n} & b_{2n} \end{pmatrix}\lambda_n\right] =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \ldots a_{1n}\lambda_n & b_{11}\lambda_1 + b_{12}\lambda_2 + \ldots . b_{1n}\lambda_n \\ a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \ldots a_{2n}\lambda_n & b_{21}\lambda_1 + b_{22}\lambda_2 + \ldots . b_{2n}\lambda_n \end{vmatrix}$$

Мысал. Мына теңдеулер жүйесінің

$$\begin{cases} u_x - u_y + v_ч + u - v = 0, \\ 2u_x + 3v_x - v_y + 2v = 0 \end{cases}$$

сипаттаушы формасы

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 & \lambda_1 \\ 2\lambda_1 & 3\lambda_1 - \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_1^2 - 4\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2.$$

Жоғарыдағы теңдеулер мен жүйелерді кластарға ажыратудың әртүрлі әдістеріне мысалдар келтірейік.

1-мысал. (Үш аргументті функция үшін 2-ретті сызықтық дифференциалдық теңдеуге). Мына берілген

$$u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} - 2u_{yz} + 3u_x - u = 0$$

теңдеудің квадраттық формасын мынадай екі тәсілмен типін анықтаймыз:

а)

$$Q = \lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_2^2 - 2\lambda_2\lambda_3 = \lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_2\lambda_3 + \lambda_3^2 - \lambda_3^2 =$$

$$= (\lambda_1 + \lambda_2)^2 + (\lambda_2 - \lambda_3)^2 - \lambda_3^2 = \mu_1^2 + \mu_2^2 - \mu_3^2,$$

демек теңдеу гиперболалық, себебі $a_1 = a_2 = 1, a_3 = -1$, ал

$$\mu_1 = \lambda_1 + \lambda_2,\ \mu_2 = \lambda_2 - \lambda_3,\ \mu_3 = \lambda_3;$$

b) $det(\widetilde{Q}-\lambda E)=0$,мұнда $\widetilde{Q}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$,

яғни $det(\widetilde{Q}-\lambda E)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix}=\lambda^3-3\lambda^2+1=0$,

бұл үш дәрежелі теңдеудің екі түбірі оң, ал үшіншісі – теріс, демек теңдеу гиперболалық.

2-мысал. Мына $u_{xx}^2-2u_{xy}^2+u_{yy}^2+2u_x-2(x+y)=0$

теңдеуді $u(x,y)=\frac{1}{2}(x+y)^2$ шешімі жиегінде сараптайық.

Теңдеудің квадраттық формасы

$$Q(\lambda_1,\lambda_2)=2u_{xx}\lambda_1^2-4u_{xy}\lambda_1\lambda_2+2u_{yy}\lambda_2^2\Big|_{u=\frac{1}{2}(x+y)^2}=$$

$$=\left|u_{xx}=u_{xy}=u_{yy}=1\right|=$$

$$=2\lambda_1^2-4\lambda_1\lambda_2+2\lambda_2^2=2(\lambda_1-\lambda_2)^2=\mu_1^2+0\mu_2^2,$$

мұнда $\mu_1=\sqrt{2}(\lambda_1-\lambda_2)$, $\mu_2=\lambda_2, a_1=1, a_2=0$, демек теңдеу параболалық.

3-мысал. (1-ретті теңдеулер жүйесі). Мына 1-ретті дербес туындылы сызықты теңдеулер жүйесінің

$$\begin{cases} 2u_x+v_{xy}+7u_y-2u=0, \\ 3u_x+3v_x+31u_y+v_y-e^y\,sin\,x=0 \end{cases}$$

типін анықтайық . Екі тәсіл қолданайық.

1) Теңдеулер жүйесін нормалдық түрге келтіреміз: ол үшін 1-теңдеуді “-3“-ке көбейтіп екі теңдеуді қосып, нәтижеден u_x туындыны анықтаймыз; одан кейін 1-теңдеуді “+3“-ке, ал 2-теңдеуді “-2“-ге көбейтіп қосамыз; қосындыдан v_x туындыны анықтаймыз; нәтижеде берілген теңдеулер жүйесін нормалдық түрге келтіреміз:

$$u_x = \frac{10}{3}u_y + \frac{1}{3}v_y + 2u - \frac{1}{3}e^y \sin x$$

$$v_x = -\frac{41}{3}u_y - \frac{2}{3}v_y - 2u + \frac{2}{3}e^y \sin x .$$

Бұл жүйенің сипаттайтын теңдеуі

$$\begin{vmatrix} \frac{10}{3} - \lambda & \frac{1}{3} \\ -\frac{41}{3} & -\frac{2}{3} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3\lambda^2 - 3\lambda + 7 = 0 \Rightarrow$$

$b^2 - 4ac = -20 < 0$, демек жүйе эллипстік теңдеулер.

2) Берілген теңдеулерден матрицалар түзейміз

$$\begin{Vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 3 & 31 \\ 3 & 1 \end{Vmatrix}$$

бұл матрицаларға сәйкес келетін сипаттайтын формасы

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = \det\left(\begin{Vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \lambda_1 + \begin{Vmatrix} 3 & 31 \\ 3 & 1 \end{Vmatrix} \lambda_2 \right) =$$

$$= \det\begin{pmatrix} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 & 7\lambda_1 + 31\lambda_2 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 & \lambda_2 \end{pmatrix} =$$

$$= -7\lambda_1^2 - 50\lambda_1\lambda_2 - 90\lambda_2^2 = -7\left(\lambda_1 + \frac{25}{7}\lambda_2\right)^2 - \frac{5}{7}\lambda_2^2 =$$

$$= -\mu_1^2 - \mu_2^2 ,$$

олай болса теңдеулер жүйесі -эллипстік, мұндағы

$$\mu_1 = \sqrt{7}\left(\lambda_1 + \frac{25}{7}\lambda_2\right), \quad \mu_2 = \sqrt{\frac{5}{7}}\lambda_2$$

Төмендегі теңдеулердің типтерін анықтаңдар

45. $3u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} - 2u_x - 5u_y + u - xy = 0$;

46. $u_{xx} + 12u_{xy} + 3u_{yy} + u_x - 2u_y - 7u + xe^x = 0$;

47. $u_{xx} - 3u_{xy} + u_{yy} - u_x - 3u_y - 5u - y = 0$;

48. $u_{xx}+4u_{xy}+4u_{yy}-3u_x+u_y+u=0$;

49. $u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}+2u_x-3u_y-2u=0$;

50. $2u_{xx}-3u_{xy}+u_{yy}-u_x+4u_y+u-xy=0$;

51. $5u_{xx}-4u_{xy}+2u_{yy}+2u_x-2u_y+x+y=0$;

52. $2u_{xx}+2u_{xy}+3u_{yy}+4u_{xz}+4u_{zz}+2u_x-2u_y-u=0$;

53. $u_{xy}+u_{yy}+u_{yz}-2u_{zz}+u_y+2u_z+3u=0$;

54. $4u_{xx}-4u_{xy}+2u_{yy}+2u_{yz}+u_{zz}+u_x-3u_y-5u=0$;

55. $2u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}+2u_{xz}+3u_{zz}-3u_x+u_y-2u_z=0$;

56. $u_{xy}+u_{yz}+u_{xz}+u_{zz}+u_x-u_y-2u_z+xu=0$;

57. $2u_{xy}+2u_{yz}+4u_{xz}+u_{yy}-u_{zz}+u_y+3u_z+yu=0$;

58. $4u_{xx}+8u_{yy}+4u_{xz}+12u_{yz}+5u_{zz}+u_x-2u_z+9u=0$.

Берілген шешімде теңдеулердің типтерін берілген шешім жиектерінде анықтаңдар

59. $u_{xx}^2+5u_{xy}+x^2u_{yy}^2-16x^2-4=0$,

$u_1=x^2-2y^2, u_2=\frac{4}{5}xy-2y^2$;

60. $u_{xx}^3+3u_{xy}^2+yu_{yy}+6y^2-8=0$, $u=x^2+y^3$;

61. $u_{xx}u_{xy}+u_x^2u_{yy}+u_y-x+2=0$,

$u=xy-x^2$;

62. $u_{xx}^2u_{yy}-u_{yy}u_{xy}+2u_x-u_y-3x-10=0$,

$u=x^2+y^2-xy$;

63. $u_{xx}^4+2u_{xy}^2-3u_{yy}+u_y-2x=0$, $u=2xy-8y$;

64. $u_{xx}^2-2u_{xy}^2+u_{yy}^2+2u_x-2(x+y)=0$, $u=\frac{1}{2}(x+y)^2$;

65. $u_{xx}u_{xy}-u_{xx}u_{yy}-u_{yy}^2+yu_x+xu_y-x^2-y^2-3=0$;

$u = xy + x^2 - y^2$

66. $u_{xx}^2 - 3u_{xy} - u_{xx}u_{yy} - 4yu_x + 8xy^2 + 6x + 3 = 0$,

$u = xy + yx^2$;

67. $u_{xx}^2 + u_{xy}^2 + u_{yy}u_{xy} + 4u_x + 8y = 0$, $u = 2y^2 - 2xy + x$;

68. $u_{xx}u_{xy} - 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2 + xu_y + 2x^2 - x = 0$,

$u = 2x^2 - 2xy + y$.

Төмендегі теңдеулер жүйесінің типтерін анықтаңдар

69. $\begin{cases} 3u_x - 2u_y - 2v_x + v_y + u = 0, \\ u_x + u_y + v_x - v_y + v = 0; \end{cases}$

70. $\begin{cases} 2u_x + 3u_y + 2v_y + u = 0, \\ 3u_x - 2v_x + v_y - 3v = 0; \end{cases}$

71. $\begin{cases} u_x - u_y + 2v_x - 2v_y + v = 0, \\ u_y + v_x + v_y + 3u = 0; \end{cases}$

72. $\begin{cases} u_x + u_z + v_y - 2v_z + u = 0, \\ u_y + 2u_z + v_x + v_y + v = 0; \end{cases}$

73. $\begin{cases} 2u_x + u_y + u_z + 4v_x - 2v_y + v_z = 0, \\ u_y - 2u_z + v_z + u = 0; \end{cases}$

74. $\begin{cases} u_x + 2u_y + 2v_y - v_z + u = 0, \\ u_x + u_z + v_x + v_z + v = 0; \end{cases}$

75. $\begin{cases} 2u_y - u_z - v_x - v_y + 2v_z - 2u = 0, \\ u_x + u_y - 2v_y - v_z - 3v = 0; \end{cases}$

76. $\begin{cases} u_x + u_y + 2u_z + v_x + v_z - 8 = 0, \\ u_y - u_z + v_y + 3u - 1 = 0; \end{cases}$

77. $\begin{cases} u_x - 2u_z - 2v_y + v_z + u - 7 = 0, \\ 2u_y - u_z + v_x - 3v_z - 5 = 0. \end{cases}$

§4 Екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеуді кластарға бөлу және оны канондық түрге келтіру.

1. Екі аргументті функцияның дифференциалдық теңдеуін канондық түрге келтіру.

Белгісіз $u = u(x, y)$ функция үшін мына дербес туындылы теңдеуді қарастырайық:

$$a_{11}(x,y)u_{xx} + 2a_{12}(x,y)u_{xy} + a_{22}(x,y)u_{yy} + \\ + F(x,,u,u_x,u_y) = 0 \qquad (1.32)$$

мұндағы $a_{ij}(x, y)$ коэффициенттер $\forall(x,y) \in \Omega$ үшін белгілі нақты үзіліссіз функциялар. Дискриминантын $\Delta(x,y) = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ деп белгілейік, ал оның *квадраттық формасы*

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = a_{11}\lambda_1^2 + 2a_{12}\lambda_1\lambda_2 + a_{22}\lambda_2^2 \qquad (1.33)$$

1-анықтама. Егерде (1.32) теңдеудің $\forall(x,y) \in \Omega$ үшін дискриминанты $\Delta > 0$ болса, онда ол дифференциалдық теңдеу *гиперболалық,* ал $\Delta < 0$ – *эллиптикалық*, ал $\Delta = 0$ болса *параболалық* теңдеулер деп аталады.

1-мысал. $u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} + 2u_x + u_y - u - xy = 0$,

мұнда $a_{11} = 1, a_{12} = 2$, $a_{22} = 1$, демек $\Delta = 4 - 1 = 3 > 0$ –теңдеу гиперболалық

2-мысал. $2u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + u_x - u + x = 0$,

мұндағы $a_{11} = 2, a_{12} = 1$, $a_{22} = 1$, олай болса $\Delta = 1 - 2 = -1 < 0$ –теңдеу эллипстік.

3-мысал. $2u_{xx} + 4u_{xy} + 2u_{yy} + u_y + u + y = 0$,

мұнда $a_{11} = 2, a_{12} = 2$, $a_{22} = 2$, олай болса $\Delta = 4 - 4 = 0$, демек теңдеу параболалық.

2-анықтама. Егер $\varphi(x,y) = 0$ қисық сызық мына сызықтық емес бірінші ретті

$$Q(grad\,\varphi) = a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = 0 \qquad (1.34)$$

теңдеуді қанағаттандырса, ол қисықты сипаттаушы деп атаймыз.

Бұл (1.34) сызықты емес теңдеуді

$$\left[a_{11}\varphi_x + (a_{12} + \sqrt{\Delta})\varphi_y\right]\left[a_{11}\varphi_x + (a_{12} - \sqrt{\Delta})\varphi_y\right] = 0$$

көбейткішке жіктеп, мынадай

$$\begin{cases} a_{11}\varphi_x + (a_{12} + \sqrt{\Delta})\varphi_y = 0, \\ a_{11}\varphi_x + (a_{12} - \sqrt{\Delta})\varphi_y = 0 \end{cases} \qquad (1.35)$$

бірінші реттік сызықтық дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесін аламыз.

Бұларға сәйкес сипаттаушы қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесі

$$\frac{dx}{a_{11}} = \frac{dy}{a_{12} + \sqrt{\Delta}}, \quad \frac{dx}{a_{11}} = \frac{dy}{a_{12} - \sqrt{\Delta}}.$$

Оларды бір-біріне көбейтіп

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dydx + a_{22}dx^2 = 0 \qquad (1.36)$$

қарапайым дифференциалдық бір теңдеуге келтіреміз.

3-анықтама. Қарапайым (1.36) дифференциалдық теңдеуді (1.32) дербес туындылы дифференциалдық теңдеудің *сипаттаушы* теңдеуі деп атайды.

Егерде $\Delta > 0$ болса, онда (1.36) сипаттауыш теңдеудің екі нақты шешімі болады:

$$\varphi(x, y) = C_1, \ \psi(x, y) = C_2 \qquad (1.37)$$

Егерде $\Delta < 0$ болса, онда (1.36) сипаттауыш теңдеудің екі өзара түйіндес комплекстік шешімдері:

$$\varphi_1(x, y) \pm i\varphi_2(x, y) = C \qquad (1.38)$$

болады. Ал жалпы жағдайда (1.37) өрнекті $\varphi_1(x, y) \pm i\varphi_2(x, y) = \varphi(x, y)$ деп алуға болатындықтан, мұндағы $\varphi(x, y)$ функция $a_{11}\varphi_x + (a_{12} + i\sqrt{-\Delta})\varphi_y = 0$ теңдеудің шешімі. Сондықтан $\varphi_i(x, y)$, $(i = 1,2)$ функциялар сипаттауыш теңдеуді қанағаттандырады.

Егерде $\Delta = 0$ болса, онда сипаттауыш теңдеудің жалғыз (еселі) нақты шешуі $\varphi(x, y) = C$ болады.

Егер (1.32) теңдеу гиперболалық типке жатса, онда $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$ ерекше емес алмастыру арқылы

$$u_{\xi\eta} + \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0 \qquad (1.39)$$

бірінші-канондық (ықшамдалған), түрге келеді. Бұл (1.39) теңдеуге $\xi_1 = \xi + \eta$, $\eta_1 = \xi - \eta$ жаңа алмастыру енгізсек, онда ол

$$u_{\xi_1\xi_1} - u_{\eta_1\eta_1} + \Phi_1(\xi_1, \eta_1, u, u_{\xi_1}, u_{\eta_1}) = 0 \qquad (1.40)$$

екінші канондық түрге келеді.

Егер (1.32) теңдеу эллиптикалық типке жатса, онда $\xi = \varphi_1(x, y)$, $\eta = \varphi_2(x, y)$ алмастырумен

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \Phi_2(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0$$

түріндегі канондық түрге келеді.

Егерде (1.32) теңдеу параболалық типке жатса, онда $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$ алмастыруды пайдаланамыз, мұндағы, $\psi(x, y)$ функция $\varphi(x, y)$ функциямен байланыспаған тәуелсіз, яғни алмастыру Якобианы $\dfrac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \neq 0$ болатындай таңдап алынады. Нәтижеде (1.32) теңдеу $u_{\xi\xi} + \Phi_3(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0$ түріндегі канондық түрге келеді.

1-ескерту. Егер (1.32) теңдеудегі

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = a_{31}(x, y)u_x + a_{32}(x, y)u_y + a_{33}u \quad -$$

сызықты функция болса, онда жоғарыдағы алмастырулар нәтижесінде $\Phi_i(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$, (i=1,2,3) функциялар аргументтері u, u_ξ, u_η –лар бойынша сызықтық функциялар болады.

2-ескерту. Егер (1.32) теңдеу тұрақты коэффициенттік сызықтық дифференциалдық теңдеу болса, онда

$$u(\xi, \eta) = v(\xi, \eta)\, e^{\alpha\xi + \beta\eta}$$

алмастыру нәтижесінде канондық теңдеуді әрі қарай ықшамдауға болады. Мұндағы α, β –таңдап алынатын, еркін тұрақты сандар.

2. Көп аргументті функцияның дифференциалдық теңдеуін канондық түрге келтіру

Көп аргументті $u=u(x_1,x_2,...x_n)$ функция үшін мына дифференциалдық теңдеуді

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)u_{x_j} + c(x)u = f(x) \qquad (1.41)$$

қарастырайық, мұндағы $a_{ij}(x), b_j(x), c(x)$- коэффициенттермен бос мүше $f(x) - \forall x \in \Omega$ облыста үзіліссіз белгілі функциялар және $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, i,j=1,2,...,n.

4-анықтама. Егер R^n кеңістікте көп аргументті функция φ(x)

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\varphi_{x_i}\varphi_{x_j} = 0 \qquad (1.42)$$

теңдеуді қанағаттандырса, онда $\varphi(x)=C$ бет (1.41) теңдеудің ***сипаттауыш беті*** деп аталады.

3-ескерту. Егерде (1.41) теңдеудің коэффициенттері, жалпы жағдайда, айнымалы функциялар болса, жалпы $\xi_i = \varphi_i(x)$, i=1,2,...n алмастыру арқылы (1.42) теңдеуді канондық түрге келтіруге болмайды. Себебі $A=(a_{ij}(x))$ матрицаның бас диагоналында жатпайтын элементтердің саны $\frac{n^2-n}{2}$, ал таңдап алынатын функциялардың саны n сәйкес емес. Екіншіден (1.42) сипаттауыш теңдеуді шешу де оңай емес. Ал a_{ij} коэффициенттер тұрақты болса, онда (1.41) теңдеуді канондық түрге келтіруге болады.

Сондықтан (1.42) теңдеудің квадраттық формасын коэффициентгері тұрақтыландырылған $x^0=(x_1^0,x_2^0,...x_n^0)$ нүктеде қарастырамыз

$$Q^0(\lambda_1, \lambda_2, ... \lambda_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x^0)\lambda_i\lambda_j . \qquad (1.43)$$

Жоғары алгебрада: коэффициенттері тұрақты кез-келген квадраттық форманы ерекше емес аффиндық $X = P\xi$ түрлендіру арқылы канондық түрге келтіруге болатыны белгілі.

Сондықтан егерде

$$\bar{\xi} = P^I \bar{x} \qquad (1.44)$$

түрлендіруін енгізсек, онда $x=x^0$ нүктеде (1.39) теңдеу (1.41) нәтижесінде

$$q_1 u_{\xi_1\xi_1} + q_2 u_{\xi_2\xi_2} + ... + q_n u_{\xi_n\xi_n} + \sum_{i=1}^{n} \bar{b}_i u_{\xi_i} + c\bar{u} = \bar{f}(\xi) \qquad (1.45)$$

канондық түрге келтіріледі, мұндағы $q_i(i = 1,2,...n)$ коэффициенттер оң, теріс және нөл шамалар болады.

3-ескерту. Егер (1.43) теңдеудің коэффициентері тұрақты болса, онда (1.45) түрге келгенде ол оңай

$$u(\xi) = v(\xi)e^{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\xi_i} \qquad (1.46)$$

алмастырумен теңдеуді әрі қарай ықшамдауға болады. (1.46) алмастырудағы α_i, $i=1,2,...n$ өзіміз таңдап алатын белгісіз тұрақты шамалар.

Екі немесе үш аргументті функция үшін берілген екінші ретті сызықтық дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерді канондық түрге келтіруге бірнеше мысалдар қарастырайық.

1-мысал. Мына

$$2u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} + 7u_x + 4u_y - 2u = 0$$

теңдеуді канондық түрге келтірейік.

Шешуі. Коэффициенттері: $a_{11} = 2, a_{12} = \dfrac{3}{2}, a_{22} = 1$,

$$\Delta = \frac{9}{4} - 2 > 0 \text{ - гиперболалық тип;}$$

сипаттайтын теңдеуі: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3}{4}\pm\dfrac{1}{4}\Rightarrow$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1=1\Rightarrow\ \xi=y-x\,,\ \left(\frac{dy}{dx}\right)_2=\frac{1}{2}\Rightarrow\eta=2y-x$$

$$\xi_x=-1\,,\ \xi_y=1\,,\ \eta_x=-1\,,\ \eta_y=2\,,$$

$$u_x=u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x=-(u_\xi+u_\eta)\,,$$

$$u_y=u_\xi\xi_y+u_\eta\eta_y=u_\xi+2u_\eta\,,$$

$$u_{xx}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\,,$$

$$u_{yy}=u_{\xi\xi}+4u_{\xi\eta}+4u_{\eta\eta}\,,$$

$$u_{xy}=-u_{\xi\xi}-3u_{\eta\xi}-2u_{\eta\eta}$$

Бұларды берілген теңдеуге қойсақ:

$$u_{\xi\eta}+3u_\xi-u_\eta+2u=0\,.$$

2-мысал. Мына $u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}+9u_x+9u_y-9u=0$ теңдеуді канондық түрге келтірейік

Шешуі. $\Delta(x,y)=0\,,\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{1,2}=-1\Rightarrow\begin{cases}\xi=x+y,\\ \eta=x.\end{cases}$

Жоғарыдағыдай талдау жасасақ $u_{\xi\xi}+18u_\xi+9u_\eta-9u=0$ канондық түрге келеді.

3-мысал. Мына

$$u_{xx}+4u_{xy}+10u_{yy}-2yu_x+42u_y+2(x+y)=0$$

теңдеуді канондық түрге келтірейік.

Шешуі.

$$\Delta(x,y)=4-10=-6<0\,,\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{-6}}{1}\Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx}=2\pm\sqrt{-6}\Rightarrow y-2x\pm i\sqrt{6}x=C\,,$$

олай болса $\xi=y-2x,\eta=\sqrt{6}x$ деп жаңа айнымалы енгізсек берілген теңдеуді

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+15u_{\xi}-4\sqrt{6}u_{\eta}+\frac{1}{3}\xi+\frac{1}{\sqrt{6}}\eta=0$$

канондық түрге келеді.

4-мысал /үш аргументті функция үшін/. Мына теңдеуді

$$u_{xx}+4u_{yy}+9u_{zz}+4u_{xy}+6u_{xz}+12u_{yz}-2u_{x}-4u_{y}-6u_{z}=0$$

канондық түрге келтіру керек.

Шешуі: бұл теңдеудің квадраттық формасын

$$Q(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\lambda_1^2+4\lambda_2^2+9\lambda_3^2+4\lambda_1\lambda_2+6\lambda_1\lambda_3+12\lambda_2\lambda_3$$

белгілі әдіспен канондық түрге келтірейік:

$$Q(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3)^2+0*\lambda_2^2+0*\lambda_3^2=$$

$$=\mu_1^2+0*\mu_2^2+0*\mu_3^2$$

демек параболалық түрдегі теңдеу, мұндағы

$$\left.\begin{array}{l}\mu_1=\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3,\\ \mu_2=\lambda_2,\\ \mu_3=\lambda_3\end{array}\right| \text{немесе} \quad \begin{array}{l}\lambda_1=\mu_1-2\mu_2-3\mu_3,\\ \lambda_2=\mu_2,\\ \lambda_3=\mu_3,\end{array}\Bigg|$$

яғни $\lambda=P\mu$, мұндағы

$$P=\begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$ - квадраттық форманы канондық түрге

келтіретін матрица. Бұл матрицаның орыналмасқан /транспонированная/ матрицасы

$$P^T=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ -3 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

және осыған сәйкес келетін түрлендіру

$\xi=x, \eta=-2x+y, \varsigma=-3x+z$ болады.

Демек,

$$\xi_x=1, \xi_y=\xi_z=0, \eta_x=-2, \eta_y=1, \eta_z=0, \varsigma_x=-3, \varsigma_y=0, \varsigma_z=1$$

олай болса

$$u_x = u_\xi - 2u_\eta - 3u_\varsigma,\ u_y = u_\eta, u_z = u_\varsigma,$$
$$u_{xx} = u_{\xi\xi} - 2u_{\eta\varsigma} - 3u_{\varsigma\varsigma},\ u_{yy} = u_{\eta\eta},\ u_{zz} = u_{\varsigma\varsigma}.$$

Бұл өрнектерді теңдеуге қойсақ, нәтижеде $u_{\xi\xi} - 2u_\xi = 0$ теңдеудің канондық формасын аламыз.

5-мысалы. $u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} - u_x + 2u_y = 0$.

Шешуі: $\Delta(x,y) = 0,\ \dfrac{dy}{dx} = -3 \Rightarrow \xi = 3x + y, \eta = x \Rightarrow$

$$\xi_x = 3, \xi_y = 1, \eta_x = 1,\ \ \eta_y = 0$$

болғандықтан, берілген теңдеу $u(\xi,\eta)$ үшін $u_{\eta\eta} - u_\xi - u_\eta = 0$ түрге келтірілді; енді $u(\xi,\eta) = v(\xi,\eta)e^{\lambda\xi+\mu\eta}$ деп алып, теңдеуге қойсақ $\lambda = -\dfrac{1}{4}$, $\mu = \dfrac{1}{2}$ жағдайда ол теңдеу $v_{\eta\eta} - v_\xi = 0$ канондық түрге келтіріледі.

Мына теңдеулердің типін анықтап және канондық түрге келтіріңіз:

78. $u_{xx} + 5u_{xy} + 4u_{yy} = 0$;

79. $u_{xx} - 6u_{xy} + 13u_{yy} = 0$;

80. $y^2u_{xx} - 2xyu_{xy} + x^2u_{yy} = 0$;

81. $y^2u_{xx} - x^2u_{yy} - 2xu_x = 0$;

82. $xyu_{xx} + u_{yy} + \dfrac{1}{2}yu_x - \dfrac{1}{2y}u_y = 0,\quad x \geq 0$ облыста;

83. $u_{xx} + 2u_{xy} + cos^2 x\, u_{yy} - ctqx(u_x + u_y) = 0$;

84. $u_{xx} - xu_{yy} = 0$;

85. $2u_{xy} - u_{xz} + 2u_{yz} - u = 0$;

86. $u_{xy} - u_{xz} - u_{yz} = 0$;

87. $u_{xy} - u_{zz} + u_x - u_y = 0$

Төмендегі теңдеулерді канондық түрге келтіріңдер және оларды әрі қарай ықшамдарыдаңдар:

88. $2u_{xx} + 5u_{xy} + 3u_{yy} + 4u_x - 3u_y + 6u = 0$;

89. $u_{xx} - 3u_{xy} + 4u_{yy} + 2u_x - u_y - 3u = 0$;

90. $u_{xx} - 4u_{xy} + 5u_{yy} + 2u_{yz} + 3u_{zz} - 2u_x + 4u_z - u = 0$;

91. $3u_{xx} + 4u_{xy} + 3u_{yy} + 2u_{xz} - u_{zz} + u_x - u_y + 2u_z = 0$;

92. $u_{xx} + 2u_{xz} + 4u_{yz} + u_{yy} + 5u_{zz} + 3u_x - 2u_z + 4u = 0$;

93. $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} - 6u_{yz} + u_{zz} - u_{tt} - 2u_{yt} - 2u_{zt} + u = 0$;

94. $4u_{xx} - 4u_{xy} - y^2 - u_{yz} - 2u_{zz} + u_{tt} + 2u_{yt} + 2u_{zt} - 3u = 0$

Жауаптары

1. алгебралық теңдеу;
2. теңдеу емес;
3. теңдеу емес;
4. алгебралық теңдеу;
5. бірінші;
6. екінші;
7. алгебралық теңдеу;
8. квазисызықты;
9. жартылай сызықты;
10. сызықты, біртекті емес;
11. $\left(\rho + \sum_{i=1}^{n} m_i \delta(x - x_i) \right) u_{tt} = T_o u_{xx}$, $0 < x < l, t > 0$, мұндағы $\delta(x)$ - Дирак функциясы.
12. $\rho u_{tt} = T u_{xx} - ku$, $0 < x < l, t > 0$, мұндағы k - кедергі коэффициенті.

13. $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $0 < x < l, t > 0$, $a^2 = \gamma \dfrac{P_0}{\rho_0}$, $u(x,0) = 0$,

$u_t(x,0) = V$, $u(0,t) = 0$, $u_x(l,t) = 0$, мұндағы $\gamma = \dfrac{c\rho}{cv}$ - адиабат көрсеткіші; P_0 -газ қысымы, ρ_0 -тығыздық

14. $\rho u_{tt} = T u_{xx} - k u_t$, $0 < x < l, t > 0$. $u(x,0) = \varphi(x)$,

$u_t(x,0) = \psi(x)$, $0 < x < l$

$u(0,t) = u(l,t) = 0$, мұндағы k - үйкеліс коэффициенті

15. $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $x \neq 0$, $a^2 = \dfrac{T_0}{\rho}$, $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$,

$x \neq 0$:

а) $-m_0 u_{tt} + T_0 [u_x(\pm o,t) - u_x(-0,t)] + F_0 \sin \omega t = 0$, $t > 0$

б) $u(-0,t) = u(+0,t)$,

$-m_0 u_{tt} + T_0 [u_x(\pm o,t) - u_x(-0,t)] = 0$, $t > 0$

$u(-0,0) = u(+0,0) = 0$, $m_0 u_t(-0,0) = m_0 u_t(+0,0) = P$,

$t = 0$

16. $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $x > 0$, $t > 0$, $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$,

$u_t(0,0) = V_0$, $M\, u_{tt}(0,t) = S \gamma P_0\, u_x(0.t)$, мұндағы $S -$ көлденең қиманың ауданы, P_0 - қысым, $\gamma = \dfrac{c_p}{c_v}$

17. $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $x \neq c$, $0 < x < l$, $t > 0$, $u(x,0) = \varphi(x)$,

$u_t(x,0) = \psi(x)$,

$u(c+0,t) = u(c-0,t)$,

$u_x(c+0,t) - u_x(c-0.t) = \dfrac{m_0}{T} u_{tt}(c,t)$, $t > 0$

а) $u(0,t) = 0, u(l,t) = 0$, б) $u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0$;

с) $T \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = F_1(t), T \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = F_2(t)$;

г) $u_x(0,t)=0,\ (Tu_x-\sigma u)_{x=l}=0;$

д) $u(0,t)=\mu(t), Tu_x\big|_{x=0}=F(t);$

18. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(S(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ a^2=\dfrac{\rho S}{E}$

19. $u_{tt}=a^2u_{xx}\ ,\ 0<x<l\ ,\ a^2=\dfrac{E}{\rho},\ u(x,0)=\varphi(x),$

$u_t(x,0)=\psi(x),\qquad u(0,t)=0,\ (ESu_x-ku_t)\big|_{x=l}=0\ ,$

мұндағы k - кедергі коэффициенті

20. $E\dfrac{\partial}{\partial x}\left(S(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)=\rho S(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2},\qquad 0<x<l,\quad t>0,$

$u(x,0)=\varphi(x),\ \ u_t(x,0)=\psi(x),$

а) $S(x)=\left(r+\dfrac{R-r}{l}x\right)^2\pi\ ,\ u(0,t)=0\ ,\ ESu_x\big|_{x=l}=F(t);$

б) $S(x)=\left(a+\dfrac{b-a}{l}x\right)^2,$

$(SEu_x-\sigma u)\big|_{x=0}=0;\ SEu_x\big|_{x=l}=F(t);$

21. $u_{tt}+\dfrac{k}{\rho}u_t=a^2(u_{xx}+u_{yy})+\dfrac{1}{\rho}F(x,y,z,t)\ ,\ a^2=\dfrac{T}{\rho},$

22. $u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy})\ ,\ 0<x<p\ ,\ 0<y<q,\ \ t>0\ ,$

$u(x,y,o)=\varphi(x,y)\ ,\ u_t(x,y,o)=\psi(x,y)$

а) $u(0,y,t)=u(p,y,t)=u(x,0,t)=u(x,q,t)=0$

б) $u_x(0,y,t)=u_x(p,y,t)=u_y(x,0,t)=u_y(x,q,t)=0;$

в) $u_x(0,t)=u_y(x,0,t)=0,\quad u\big|_{x=p}=\mu(y,t),\quad u\big|_{y=q}=\nu(x,t);$

г) $(Tu_x-\sigma u)_{x=0}=0,\quad T\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=p}=\Phi(y,t);$

$u_y(x,0,t)=u_y(x,q,t)=0$

д) $u(0,y,t)=u(x,0,t)=0,\ T\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=p}=\Phi_1(y,t),\ T\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=q}=\Phi_2(x,t)$

23. $i_{xx}=ai_{tt}+bi_t+ci,\ v_{xx}=av_{tt}+bv_t+cv,$

$a=CL,\ b=CR+GL,\ c=GR$

мұндағы L - өзіндік индукция, C - сыймдылық, R - кедергі, G -утечка.

24. $\begin{cases} i_x+Cv_t=0 \\ v_x+Li_t=0 \end{cases}$ немесе $\begin{matrix} i_{xx}=CLi_{tt} \\ v_{xx}=CLv_{tt} \end{matrix}$,

$i(x,0)=\varphi(x),\quad v(x,o)=\psi(x):$

а) $v(0,t)=0,\quad v(l,t)=E(t),\quad (i_x(0,t)=0,\quad i_x(0,t)=-CE'(t))$

б) $C_0v_t(0,t)+i(0,t)=0,\quad C_1v_t(l,t)+i(l,t)=0,$

$\left(LC_0v_{tt}(0,t)+V_x(0,t)=0,\qquad LC_1v_{tt}(l,t)+V_x(l,t)=0\right);$

в) $v(0,t)=E(t),\quad v(l,t)+L_0i_t(l,t)=0,\quad (i_x(0,t)=-CE'(t),$
$L_0v_x(l,t)-Lv(l,t)=0)$

г) $v(0,t)+L_0i_t(0,t)\quad,\quad v(l,t)-R_0i(l,t)=E(t),$
$(L_0v_x-Lv(0,t)=0),\quad i_x(l,t)+CR_0i_t(l,t)=E'(t)$

25. $\begin{matrix} J_x+CV_t=0, \\ V_x+LJ_t=0 \end{matrix}\quad\Rightarrow J_{xx}=CLJ_{tt}$

$V|_{t=0}=V_0,\quad V_x(0,t)=0,\quad (CV_t+J)_{x=l}=0$

26. $\rho(x)u_t=div\,(D\,qrad\,u)+F(x,t)$

27. $u_t=a^2u_{xx}-\dfrac{Hp}{cpS}(u-u_0)$, $0<x<l$, $t>0$, $u(x,0)=f(x)$,

$u(0,t)=T_0,\ (u_x+hu)|_{x=l}=hu_0,\ h=\dfrac{H}{k}$, мұндағы p мен S көлденең қимасының периметрі және ауданы.

28. $u_t = a^2 u_{xx} + \dfrac{q}{c\rho}\delta(x - v_0 t)$, $u(x,0) = \varphi(x)$, $-\infty < x < \infty$,
$t > 0$

29. $u_t = a^2 u_{xx} - b(u - u_0)$, $x = R\theta$, $0 < x < l$, $t > 0$, $l = 2\pi R$,
$u(x,0) = f(x)$, $u(0,t) = u(l,t)$, $u_x(0,t) = u_x(l,t)$, $b = \dfrac{Hp}{c\rho S}$

30. $\rho_0 u_t = Du_{zz} - vu_z$, $z > z_0$, $t > 0$, $u|_{t=0} = 0$,
$(Du_z - vu)|_{z=z_0} = 0$

мұндағы v - тұнатын бөлшектің жылдамдығы,
ρ_0 - ортаның саңылаулығы

31. $\dfrac{\partial u_i}{\partial t} = a_i^2(x)\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}$, $x \neq 0$, $u_i(x,0) = f_i(x)$,

$u_1(+0,t) = u_2(-0,t)$,

$$k_1 \left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=0} = k_2 \left.\frac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{x=0}, \quad a_i^2(x) = \begin{cases} a_1^2, & x > 0 \\ a_2^2, & x < 0 \end{cases}$$

32. $\dfrac{\partial u_i}{\partial t} = a_i^2 \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}$, $0 < x < l$, $x \neq x_0$, $t > 0$, $u_i(x,0) = f_i(x)$

$$u_1|_{x=0} = \varphi_1(t), \ k_2 \left.\frac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{x=l} = H(u - u_0),$$

$$u_1|_{x=x_0} = u_2|_{x=x_0} \ k_1 \left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=x_0} = k_2 \left.\frac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{x=x_0},$$

x_0 - түйісу нүктесі.

33. $\dfrac{\partial C}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 C}{\partial x^2}$, $C(x,0) = \begin{cases} c_0, & 0 < x < h, \\ 0, & h < x < l, \end{cases}$,

$$\left.\frac{\partial C}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial C}{\partial x}\right|_{x=l} = 0$$

34. а) $u_t = a^2\Delta_r u - \beta u, \quad 0 \le r < R, \quad t > 0, \quad \beta = \dfrac{H}{c\rho};$

$$u(r,0) = T_0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R} = 0;$$

б) $u_t = a^2\Delta_r u + \dfrac{Q}{c\rho}, \quad 0 < r < R, \quad t > 0;$

$$u(r,0) = T_0, \quad \left.\left(k\frac{\partial u}{\partial r} + Hu\right)\right|_{r=R} = 0;$$

мұндағы $\Delta_r u = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)$, H - сыртқы жылуөткізгіш коэффициенті

35. $u_t = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}\right), \quad 0 \le r < R, \quad t > 0,$

$$u(r,0) = f(r), \quad u|_{r=R} = T_0.$$

36. $u_t = a^2\Delta u, \quad R < r < 2R, \quad t > 0;$

$$u|_{t=0} = f(r,\theta,\varphi), \quad u|_{r=0} < \infty;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R} = 0, \quad \left.\left(\frac{\partial u}{\partial r} + hu\right)\right|_{r=2R} = \frac{Q(R,\theta,\varphi,t)}{k};$$

37. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}),\ 0 < x < l,\ 0 < y < h,\ t > 0,$

$$u(x,y,o) = f(x,y);,$$

а) $u|_{x=0} = u|_{x=l} = T_0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=h} = 0;$

б)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}-hu\right)_{x=0}=hu_0,\quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}-hu\right)_{y=0}=hu_0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=p}=\frac{q_1}{k},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=h}=\frac{q_2}{k};$$

в)

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=-\frac{q}{k},\quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}+hu\right)_{y=h}=hu_0.$$

38. $\Delta u=-\dfrac{f(x,y)}{k},\quad (x,y)\in\Omega:$

а) $u|_S=0;$

б) $\left.\dfrac{\partial u}{\partial N}\right|_S=0;$ в) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial N}-hu\right)_S=0;$ г) $-T\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_S=\Phi(x,y),$

д) $u|_S=\varphi(x,y).$

39. $\Delta u=0,\quad (x,y,z)\in\{0\le r^2=x^2+y^2<R^2,\ 0<z<h\}:$

$u|_{z=0}=\varphi_0(x,y),\quad u|_{z=h}=\varphi_1(x,y);$

а) $-k\left.\dfrac{\partial u}{\partial N}\right|_{r=R}=q(z);$ б) $u|_{r=R}=T_0,$

в) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial N}-hu\right)_{r=R}=hu_0;$

40. $\Delta u=0,\quad \left(0\le r<R,\quad 0<\theta<\dfrac{\pi}{2},\quad 0<\varphi<2\pi\right):$

$u|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=0,\quad u|_{r=R}=f(\varphi,\theta).$

41. $D\Delta u-\gamma u+Q=0,\quad 0\le r<R_0,\quad 0<z<h:$

а) $u(r,0)=u(r,h)=0,\quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R}=0;$

б)

$$\left(D\frac{\partial u}{\partial r} - du\right)\Bigg|_{z=0} = 0, \quad \left(D\frac{\partial u}{\partial r} + du\right)\Bigg|_{z=h} = 0, \quad u(R,z) = C_0$$

мұндағы D - ішкі диффузия коэффициенті, γ - бөліну коэффициенті, d - сыртқы диффузия коэффициенті

42. $\Delta u = 0, \quad 0 < x < l_1, \quad 0 < y < l_2$:

а) $u\big|_{x=0} = V_1, \quad u\big|_{x=l_1} = V_2, \quad u\big|_{y=0} = 0, \quad u\big|_{y=l_2} = 0$

б) $u\big|_{x=0} = V_1, \quad u\big|_{x=l_1} = V_2, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=l_2} = 0$

в) $u\big|_{x=0} = V_1, \quad u\big|_{x=l_1} = V_2, \quad u\big|_{y=0} = E, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0$

43. $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad 0 < r < R, \quad 0 < z < h,$

$u\big|_{r=R} = V_0. \quad u\big|_{z=0} = u\big|_{z=h} = 0.$

44. $\Delta u_1 = 0, \quad 0 < r < R, \quad u_1\big|_{r=0} < \infty;$

$\Delta u_2 = 0, \quad R < r < \infty, \quad u_2\big|_{r=\infty} = 0;$

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial r}\right|_{r=R} = \left.\frac{\partial u_2}{\partial r}\right|_{r=R}, \quad \left.\frac{\partial u_1}{\partial \varphi}\right|_{r=R} = \left(\frac{\partial u_2}{\partial \varphi} + \frac{4\pi}{c} j_{пов}\right)_{r=R},$$

$$grad\, u = \overline{H}, \quad j_{пов} = \frac{J}{2\pi R}$$

45. эллиптикалық тип;
46. гиперболалық тип;
47. гиперболалық тип;
48. параболалық тип;
49. параболалық тип;
50. гиперболалық тип;

51. эллиптикалық тип;
52. эллиптикалық тип;
53. гиперболалық тип;
54. параболалық тип;
55. эллиптикалық тип;
56. параболалық тип;
57. гиперболалық тип;
58. эллиптикалық тип;
59. эллиптикалық тип;
60. ($y > 0$ -гиперболалық, $y < 0$ -эллиптикалық, $y = 0$ -параболалық);
61. эллиптикалық тип;
62. гиперболалық тип;
63. гиперболалық тип;
64. параболалық тип;
65. эллиптикалық тип;
66. эллиптикалық тип;
67. параболалық тип;
68. гиперболалық тип;
69. эллиптикалық тип;
70. гиперболалық тип;
71. параболалық тип;
72. гиперболалық тип;
73. гиперболалық тип;
74. параболалық тип;
75. параболалық тип;
76. гиперболалық тип;
77. эллиптикалық тип;
78. Гиперболалық, $u_{\xi\eta} = 0$;
79. Эллиптикалық, $u_{\mu\mu} + u_{\nu\nu} = 0$, мұнда $\mu(x, y) = -3x - y = Re\,\xi(x, y)$ және $\nu(x, y) = 2x = J_m\,\xi(x, y)$.
80. Параболалық, айнымалыларды $\xi = x^2 + y^2$, $\eta = x$ деп, егер $\xi \neq \eta^2$, яғни $y \neq 0$ алсақ, онда $u_{\eta\eta} + \dfrac{2\xi}{\xi - \eta^2} u_{\xi} = 0$

81. $D=\{x\neq 0, \quad y\neq 0\}$ аймақта гиперболалық:

$$u_{\xi\eta}-\frac{\xi+2\eta}{\xi^2-\eta^2}u_\xi-\frac{\eta}{2(\xi^2-\eta^2)}u_\eta=0;$$ ал $x=0$ немесе $y=0$ жағдайда параболалық теңдеу.

82. $D=\{x>0, \quad y>0\}$ аймақта эллиптикалық: $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}=0$; ал $x=0$ немесе $y=0$ аймақтарда – параболалық.

83. Гиперболалық, $u_{\xi\eta}=0$;

84. $D=\{(x,y)/x=0\}$ аймақта - гиперболалық:

$$u_{\xi\eta}-\frac{1}{6(\xi-\eta)}(u_\xi-u_\eta)=0;$$ ал $x=0$ жағдайда - параболалық.

85. Параболалық: $u_{\xi\xi}-u_{\eta\eta}+u=0$, $\begin{cases}\xi=\frac{1}{5}(3x-2y-z),\\ \eta=-x+y+z.\end{cases}$

86. Гиперболалық: $u_{\xi\xi}-u_{\eta\eta}-u_{\zeta\zeta}=0$,

$$\begin{cases}\xi=x+y, \quad \zeta=-x+y,\\ \eta=x+y-z.\end{cases}$$

87. Гиперболалық: $u_{\xi\xi}-u_{\eta\eta}+u_{\zeta\zeta}-2u_\eta=0$,

$$\begin{cases}\xi=x+y, \quad \zeta=z,\\ \eta=-x+y.\end{cases}$$

88. $\begin{cases}\xi=x-y, \quad \eta=3x-2y, \quad u=ve^{7\xi+18\eta},\\ v_{\xi\eta}-253v=0.\end{cases}$

89. $\begin{cases}\xi=\frac{3}{2}x+y, \quad \eta=\frac{\sqrt{7}}{2}x, \quad u=ve^{-\frac{4}{7}\xi-\frac{2}{\sqrt{7}}\eta},\\ v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}-\frac{108}{49}v=0.\end{cases}$

90. $\begin{cases} \xi = x - 2y, \quad \eta = y + z, \quad \zeta = z, \quad u = ve^{\xi + 2\eta - 2\zeta}, \\ v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + 2v_{\zeta\zeta} - 14v = 0 \end{cases}$

91. $\begin{cases} \xi = 2x + y, \quad \eta = y, \quad \zeta = x - z, \quad u = ve^{-\frac{3}{2}\xi + \frac{5}{4}\eta + \frac{5}{2}\zeta}, \\ v_{\xi\xi} + 2v_{\eta\eta} - v_{\zeta\zeta} = 0 \end{cases}$

92. $\begin{cases} \xi = x, \quad \eta = y, \quad \zeta = -x - 2y + z, \quad u = ve^{-3\xi + \frac{5}{4}\zeta}, \\ v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} - 5v_{\zeta} = 0 \end{cases}$

93. $\begin{cases} \xi = x + y, \quad \eta = y - z, \quad \zeta = y + z + t, \quad \tau = z - t, \\ u_{\xi\xi} + 2u_{\eta\eta} - u_{\zeta\zeta} - u_{\tau\tau} + u = 0. \end{cases}$

94. $\begin{cases} \xi = 2x - y, \quad \eta = y + z, \quad \zeta = y + z + t, \quad \tau = t, \\ u_{\xi\xi} - 3u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} - 3u = 0. \end{cases}$

II тарау. ГИПЕРБОЛАЛЫҚ ТИПТІ ТЕҢДЕУЛЕР

§1. Толқын теңдеуі

1. Классикалық Коши есебі. 1-тараудың § 2 белгілі жағдайларда көптеген тербеліс құбылыстары 2-ретті гиперболалық типті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерді шешуге келтірілетінін көрсеткенбіз. Солардың ішіндегі ең қарапайымы - *толқын* теңдеуі

$$u_{tt} = a^2 \Delta u \, , \qquad (2.1)$$

мұнда Δ-Лаплас операторы, нүкте $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$ уақыт $t \in (0, \infty)$, (2.1) теңдеудің шешімі u(x,t)-әдетте толқын деп аталады.

Егер n=1 болса, онда (2.1)-шектің тербелісін, ал n=2 жағдайда жазық мембрана тербелісі теңдеуін береді.

Сипаттаушы форма (2.1) теңдеуі үшін

$$Q(\lambda) = \lambda_0^2 - a^2 \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2$$

болғандықтан, теңдеу (2.1) гиперболалық типке жатады.

Анықтама. Егерде функция w(x,t) мына

$$Q(\,gradw\,) = \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 - a^2 \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial w}{\partial x_j}\right)^2 = 0 \, . \qquad (2.2)$$

теңдеудің шешуі болса, онда R^{n+1} кеңістігінде жататын көп бейне $w(x,t) = 0$ ***сипаттаушы бет*** деп аталады.

Бірінші ретті екінші дәрежелі дербес туындылы дифференциалдық теңдеуді (2.2) тікелей шеше қою, яғни сипаттаушы бетті табу оңай емес екені белгілі.

Егер n=1 болса, онда (1.2) теңдеуді оңай шешуге болады. Себебі сызықсыз теңдеу екі сызықты теңдеулердің көбейтіндісіне жіктеледі:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 - a^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial t} - a\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial t} + a\frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0$$

Сондықтан (2.2) теңдеудің сипаттаушы қисықтары өзара қиылысатын түзулер жиынтығы $x-at=c_1$, $x+at=c_2$ тұратынына көз жеткізуге болады.

Егер $n\geq 2$ болса, теңдеу (2.2) шешімдерін тікелей табу қиын, сондада болса, кейбір геометриялық қасиеттерді пайдаланып, (2.2) теңдеудің сипаттаушы беті болатын көпбейнені табуға болады. Мысалға n=2 болғанда бет w(x,y,t)=0 жүргізілген нормальдің бағыттауыш косинустері

$$cos(N,x)=\frac{\frac{\partial w}{\partial x}}{|\nabla w|},\quad cos(N,y)=\frac{\frac{\partial w}{\partial y}}{|\nabla w|},\ cos(N,t)=\frac{\frac{\partial w}{\partial t}}{|\nabla w|}$$

формуларымен анықталатын белгілі,

Сондықтан (n=2) сипаттаушы

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2-a^2\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]=0 \qquad (2.3)$$

теңдеудің екі жағын $|\Delta w|^{-2}$ көбейтсек, онда

$$\cos^2(N,t)-a^2\cos^2(N,x)-a^2\cos^2(N,y)=0 \qquad (2.4)$$

теңдігін аламыз.

Екінші жағынан, бағыттауыш косинустері мына

$$\cos^2(N,t)+\cos^2(N,x)+\cos^2(N,y)=1 \qquad (2.5)$$

шартты қанағаттандырады. (2.4) мен (2.5) теңдіктерден

$$\cos(N,t)=\frac{\pm a}{\sqrt{1+a^2}},$$

яғни сипаттаушы бет $w(x,y,t)=0$ кез - келген нүктесіне жүргізілген $\overline{N}$ нормаль t өсімен тұрақты бұрыш жасайды. Егерде a=1 болса $(N\hat{\ }t)=\pi/4$, ондай бет тек қана конустың беті екеніне көз жеткізу қиын емес:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=(t-t_0)^2,$$

мұндағы $M_0(x_0,y_0,t_0)$ -конустың төбесі. Осы сияқты талдау арқылы (2.1) теңдеуінің сипаттаушы беті

$$a^2(t-t_0)^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i^0)^2$$

конусы болатынын көреміз.

Жоғарғы (2.1) толқын теңдеуі үшін қойылатын негізгі есептердің бірі Коши есебі: R^{n+1} кеңістігінде (2.1) теңдеудің бастапқы

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x) \tag{2,6}$$

шарттарды қанағаттандыратын шешімін табу керек. Коши есебінің шешімдерін анықтайтын формулалар:

а) Егер n=1 болса, онда Коши есебінің шешімі Даламбер формуласы бойынша

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi \tag{2.7}$$

анықталады;

б) Егер n=2 болса, онда Коши есебінің шешімі Пуассон формуласы

$$u(x,y,z)=\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint_{K_r}\frac{\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}+$$
$$+\frac{1}{2\pi a}\iint_{K_r}\frac{\psi(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}} \tag{2.8}$$

арқылы анықталады, мұндағы K_r - центрі M(x,y) нүктеде, радиусы r=at дөңгелек;

в) Егер n=3 болса, онда Коши есебінің шешімі Кирхгоф формуласы

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi a}\iint_{S_r}\frac{\psi(\xi,\eta)}{r}dS_r+\frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint_{S_r}\frac{\varphi(\xi,\eta)}{r}dS_r \tag{2.9}$$

бойынша анықталады, мұндағы S_r - центрі M(x,y,z) нүкте, ал радиусы r=at болатын сфера беті.

Дюамель қағидасы. Егер Коши есебі біртексіз

$$u_{tt}=a^2\Delta u+F(x,t),\, t>0 \tag{2.10}$$

теңдеуі үшін қойылған болса, онда бұл есептің бастапқы $u(x,0)=u_t(x,0)=0$ шарттарын қанағаттандыратын дербес шешімін Дюамель қағидасын пайдаланып табуға болады. Бұл қағида бойынша көмекші (жолай) есеп

$$w_{tt} = a^2 \Delta w \quad w\big|_{t=\tau} = 0 \quad w_t\big|_{t=\tau} = F(x,\tau), \ t > \tau$$

құрамыз. Егер $w(x,t,\tau)$ осы көмекші есептің шешімі болса, онда (2.10) теңдеудің дербес шешімі

$$u(x,t) = \int_0^t w(x,t,\tau)d\tau \tag{2.11}$$

формуласымен анықталады.

Ал көмекші есептің шешімін жоғарғыдағы (2.7),(2.8),(2.9) формулалармен табуға болады.

Сондықтан біртекті емес (2.10) теңдеу үшін Коши есебінің нөлдік бастапқы шарттарын қанағаттандыратын дербес шешімдері мына формулалармен өрнектеледі:

а) n=1 болса, онда

$$u_0(x,t) = \frac{1}{2a}\int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} F(\xi,\tau)d\xi;$$

б) n=2 болса, онда

$$u_0(x,y,t) = \frac{1}{2\pi a}\int_0^t d\tau \iint_{K_r} \frac{F(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}},$$

мұндағы r=$a(t-\tau)$;

в) n=3 болса, онда

$$u_0(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi a}\int_0^t d\tau \iint_{S_r} \frac{F(\xi,\eta,\zeta,\tau)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}dS_r =$$

$$= \left|r = a(t-\tau)\right| = \frac{1}{4\pi a^2}\iiint_{D_r} \frac{F(x+\alpha r, y+\beta r, z+\gamma r, t-r/a)}{r}dv_r$$

мұндағы α,β,γ -радиус вектордың бағыттаушы косинустары; D_r - центрі M(x,y,z), радиусы r=at шар. Әдетте соңғы интеграл *кешігуші потенциал* деп аталады.

1. Толқын теңдеуі (1.1) үшін Коши есебінің $n=1,2,3$ болғанда шешімінің тәуелділік аймақтарын табыңдар.
2. Толқынның анықталу аймағын табыңдар, егерде:

а) Шек теңдеуі үшін Коши есебінің бастапқы шарттары $a \le x \le b$ кесіндіде берілсе, толқынның жылдамдығы $a = 2$ болса;

б) Мембран теңдеуі үшін Коши есебінің бастапқы шарттары сақинада $4 \le x^2 + y^2 < 9$ берілсе, толқынның жылдамдығы $a = 3$ болса;

с) Газ тербелісінің теңдеуі үшін Коши есебінің бастапқы шарттары $x^2 + y^2 + z^2 < 1$ шарда берілсе, жылдамдық $a = 1$ болса.

3. Бастапқы шарттар әсер ететін аймақты анықтаңдар, егерде:

а) жылдамдығы $a = 3$, бастапқы шарттар $l_1 \le x \le l_2$ кесіндіде берілсе;

б) жылдамдығы $a = 1$, бастапқы шарттар $x^2 + y^2 \le l^2$ дөңгелекте берілсе;

с) жылдамдығы $a = 1$, ал бастапқы шарттың біреуі $-2 < x < -1$, кесіндіде екіншісі $1 < x < 2$ кесіндіде берілген болса. Осы екі кесінділердің әсер ететін аймақтарының жалпы бөлігін (қиылысу) табыңдар.

4. Толқынның теңдеуі $u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}$ қанағаттандыратын, біртекті 3-дәрежелі сызықты байланысты емес полиномдарды табыңдар.

5. m_i $(i = 1,2,...n+1)$ тұрақтылар қандай шартты қанағаттандырғанда (1.1) теңдеудің шешімі жазық толқын $u(x,t) = \Phi(m_1x_1 + ... + m_nx_n + m_{n+1}x_{n+1})$ түрінде болады?

6. $u(x,t) = \varphi(m_1x_1 + m_2x_2 + ... + m_nx_n + mt)$ жазық толқынның таралу жылдамдығын анықтаңыз.

7. Төмендегі функциялардың қайсысы толқынның таралуын береді және оның жылдамдығын табыңдар.

а) $u(x,y,z,t) = x^2 + y^2 + z^2 - 4t;$

б) $u(x,y,z,t) = x^2 + y^2 + z^2 - xt^2;$

в) $u(x,y,z,t) = x^2 + y^2 + z^2 + 9t^2;$

г) $u(x,y,z,t) = x^2 + x + t^2.$

8. Егерде $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ функциялар $x \in R^n$ гармоникалық функциялар болса, онда Коши есебі

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f(x)\, g(t), \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(x)$$

шешімі мына

$$u(x,t) = \varphi(x) + t\psi(x) + f(x)\int_0^t (t-\tau) g(\tau) d\tau$$

формуламен анықталатынын дәлелдеңдер.

9. Егер функция $u(x,t)$ Коши есебі

$$u_{tt} = a^2 \Delta u, \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t\big|_{t=0} = 0$$

шешімі болса, онда мына функция

$$V(x,t) = \int_0^t u(x,\tau) d\tau$$

Коши есебінің $V_{tt} = a^2 \Delta V$, $V\big|_{t=0} = 0$, $V_t\big|_{t=0} = \varphi(x)$ шешімі болатынын көрсетіңдер

2. Сипаттаушылар әдісі

Жалпы шешім туралы ұғым. Біз 1 тараудың 4-параграфында теңдеудің сипаттаушы қисықтарын пайдаланып дербес туындылы теңдеулерді конондық түрге келтірдік. Канондық теңдеулерді түрліше интегралдау әдістерімен шешімдерін кез - келген екі функциялар арқылы өрнектеуге болады. Міне осы шешімді берілген екінші ретті дербес туындылы теңдеудің жалпы шешімі дейміз.

Мысалы. Мына $yu_{xx} + (x-y)u_{xy} - xu_{yy} = 0$ теңдеудің жалпы шешуін табайық.

Шешуі: $\Delta(x,y) = \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 > 0$ болса, яғни $x + y \neq 0$ жағдайда гиперболалық тип, ал $x+y=0$ сызығы тозғындалған параболалық сызық.

Сипаттаушы теңдеуді

$$ydy^2-(x-y)dydx-xdx^2=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{(x-y)\pm|x-y|}{2y}$$

$$\Rightarrow x+y=C_1,\, x^2-y^2=C_2 \;\Rightarrow\; \xi=x+y,\; \eta=x^2-y^2.$$

Олай болса бұл жаңа айнымалыда теңдеуіміз $\xi\, u_{\xi\eta}+u_\eta=0$ немесе $\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\xi\frac{\partial u}{\partial\xi}+u\right)=0$ түрге келеді; мұны айнымалы бойынша интегралдап $\xi\frac{\partial u}{\partial\xi}+u=f_1(\xi)$ аламыз, мұндағы $f_1(\xi)-$тек ξ айнымалыға тәуелді еркін функция. Бұл теңдеуді жай дифференциалдық теңдеу деп қарауға болады. (ξ-айнымалы, ал $\eta-$ тұрақтандырылған). Тұрақты коэффициентті вариациялау әдісін пайдаланып

$$u(\xi,\eta)=\frac{1}{\xi}\left[\int f_1(\xi)d\xi+\varphi(\eta)\right]$$

шешімін аламыз, мұндағы $\varphi(\eta)-$кез - келген функция. Егер $\frac{1}{\xi}\int f_1(\xi)d\xi=f(\xi)$ деп белгілесек, $u(\xi,\eta)=f(\xi)+\frac{1}{\xi}\varphi(\eta)$ болады, бұдан әуелгі айнымалыға өтсек

$$u(x,y)=f(x+y)+\frac{1}{x+y}\varphi(x^2-y^2).$$

Мына теңдеулердің жалпы шешімдерін табыңыз:

10. $u_{xx}+2u_{xy}+cos^2 x\,u_{yy}-ctqx(u_x+u_y)=0$;

11. $u_{yy}-2u_{xy}+2xu_x-u_y=4e^x$;

12. $u_{xy}+au_x=0$;

13. $u_{xy}-2u_x-3u_y+6u=2e^{x+y}$;

14. $u_{xy}+au_x+bu_y+abu=0$;

15. $u_{xy}-xu_x+u=0$;

16. $u_{xy} + yu_y - u + \sin x = 0$;

17. $u_{xx} - (1 + y^2) u_{yy} - 2(1 + y^2) u_y = 0$;

18. $u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} - 3u_x - 6u_y = 0$;

19. $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} + 4u_x - 4u_y + 16(x + y) = 0$;

20. $3u_{xx} - 5u_{xy} - 2u_{yy} + 3u_x + u_y = 2$;

21. $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0$;

22. $u_{xx} - e^x u_{yx} - u_x = ye^{2x}$;

23. $\cos^2 y\, u_{xx} - 2\sin y\, u_{xy} - u_{yy} + u_x(\sin y + \cos y - 1) + u_y = 0$

Мына жалпы жағдайда берілген Коши есептерін шешіңіз:

24. $u_{xy} + u_x = 0$, $u\big|_{y=x} = \sin x; u_x\big|_{y=x} = 1$;

25. $u_{xx} - u_{yy} + 2u_x + 2u_y = 0$; $u\big|_{y=0} = x, u_y\big|_{y=0} = 0$;

26. $u_{xy} + yu_x + xu_y + xyu = 0$; $u\big|_{y=3x} = 0, u_y\big|_{y=3x} = e^{-5x^2}, x < 1$;

27. $e^y u_{xy} - u_{yy} + u_y = xe^{2y}$; $u\big|_{y=0} = \sin x, u_y\big|_{y=0} = \dfrac{1}{1+x^2}$;

28. $xu_{xx} + (x + y)u_{xy} + yu_{yy} = 0$;

$u\big|_{y=\frac{1}{x}} = x^3, u_x\big|_{y=\frac{1}{x}} = 2x^2, x > 0$;

29. $u_{xx} + 2(1 + 2x)u_{xy} + 4x(1 + x)u_{yy} + 2u_y = 0$;

$u\big|_{x=0} = y, u_x\big|_{x=0} = 2, \quad |y| < \infty$;

30. $u_{xx} - 6u_{xy} + 5u_{yy} = 0$; $u\big|_{y=x} = \sin x, u_y\big|_{y=x} = \cos x$;

31. $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} - 2yu_y = 0$; $u\big|_{x=1} = y, u_x\big|_{x=1} = y, y < 0$;

32. $u_{xy}=0;\ u\Big|_{y=x^2}=0, u_y\Big|_{y=x^2}=\sqrt{|x|}, |x|<1$;

33. $u_{xx}-2\sin x u_{xy}-(3+\cos^2 x)u_{yy}-\cos x u_y=0;$

$u\Big|_{y=\cos x}=\sin x, u_y\Big|_{y=\cos x}=e^x/2$.

Классикалық Коши есептері:

а) n=1 жағдай (Даламбер формуласы):

34. $u_{tt}=u_{xx}, x\in(-\infty,+\infty), t>0; u\big|_{t=0}=\cos x, u_t\big|_{t=0}=0$;

35. $u_{tt}=u_{xx}, x\in(-\infty,+\infty), t>0; u\big|_{t=0}=\dfrac{1}{1+x^2}, u_t\big|_{t=0}=\cos x$;

36. $u_{tt}=4u_{xx}+xt, x\in(-\infty,+\infty), t>0; u\big|_{t=0}=x^2, u_t\big|_{t=0}=x$;

37. $u_{tt}=u_{xx}+\sin x, x\in(-\infty,+\infty), t>0; u\big|_{t=0}=\sin x, u_t\big|_{t=0}=0$;

38. $u_{tt}=u_{xx}+e^x, x\in(-\infty,+\infty), t>0; u\big|_{t=0}=\sin x,$

$u_t\big|_{t=0}=x+\cos x$;

39. $u_{tt}=u_{xx}+ae^{-t}, x\in(-\infty,+\infty), t>0; u\big|_{t=0}=6\sin x,$

$u_t\big|_{t=0}=c\cos x$;

б) n=2 (Пуассон формуласы):

40. $u_{tt}=\Delta u+x^3-3xy^2,$

$u(x,y,t)\big|_{t=0}=e^x\cos y, u_t\big|_{t=0}=e^y\sin x$;

41. $u_{tt}=a^2\Delta u,$

$u(x,y,t)\big|_{t=0}=\cos(bx+cy), u_t\big|_{t=0}=\sin(bx+cy)$;

42. $u_{tt}=a^2\Delta u+(x^2+y^2)e^t,\ u(x,y,t)\big|_{t=0}=0, u_t\big|_{t=0}=0$.

в) n=3 (Кирхгоф формуласы):

43. $u_{tt}=8\Delta u+t^2x^2,\ u\big|_{t=0}=y^2, u_t\big|_{t=0}=z^2$;

44. $u_{tt} = a^2 \Delta u + (x^2 + y^2 + z^2)e^t, \; u\big|_{t=0} = u_t\big|_{t=0} = 0$

Төмендегі бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер үшін Коши есебін шешіңдер:

45. $3u_x + 2u_y = 0, \quad u(x,o) = \varphi(x);$

46. $2u_x - u_y = x\cos x, \quad u(x,o) = 2 + x;$

47. $u_x + 3u_y = 3ye^x, \quad u(x,o) = 0;$

48. $u_x - 2u_y + 2u = 0, \quad u(x,o) = \sin x;$

49. $3u_x - u_y + (x + 3y)u = 0, \quad u(x,x) = \varphi(x);$

50. $u_x + u_y + \sin(x - y)u = 0, \quad u(x,0) = \cos x;$

51. $4u_x - 5u_y + 10u = 0, \quad u(x,-x) = xe^{-2x};$

52. $5u_x - 3u_y + 3u = 0, \quad u(x,-\frac{x}{5}) = 3x;$

53. R^3 кеңістігінде толқын теңдеуінің r мен t тәуелді жалпы шешімі

$$u(r,t) = \frac{f(r + at) + g(r - at)}{r}, \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

формуламен өрнектелетінін көрсетіңдер, $f(x)$ пен $g(x) \in C^2$ кез - келген функциялар. Мұндай шешімдер сфералық толқындар деп аталады.

54. R^3 кеңістігінде толқын теңдеуі үшін Коши есебін мына

$$u(r,0) = \varphi(r), \quad u_t(r,0) = \psi(r)$$

шарттармен шешіңдер. Шешім регулярлық болуы үшін берілген $\varphi(r)$ мен $\psi(r)$ функцияларға қандай шарттар қойылады?

3. Толқын теңдеуі үшін Коши есебін қатарлар арқылы шешу әдісі

Егер $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in R^n, t>0$ болғанда толқын теңдеуі

$$\sum_{j=1}^{n} u_{x_j x_j} - u_{tt} = 0$$

мына бастапқы шарттарды

$$u\ (x,0)=\mu(x),\ u_t(x,0)=\nu(x)$$

қанағаттандыратын шешімі

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{t^{2k}}{(2k)!}\Delta^k\mu(x)+\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\Delta^k\nu(x)\right] \qquad (2.12)$$

қатармен анықталатынын тексеру қиын емес.

Ал біртекті емес теңдеулер үшін Коши есебін Дюамель қағидасын пайдаланып шешеді.

Көмекші Коши есебі

$$\omega_{tt}-\Delta\omega=0,\quad \omega\big|_{t=\tau}=\mu(x,\tau),\ \ \omega_t\big|_{t=\tau}=\nu(x,\tau), t>\tau$$

(3.5) есептің шешімі мына

$$u(x,t,\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(t-\tau)^{2k}}{(2k)!}\Delta^k\mu(x,\tau)+\frac{(t-\tau)^{2k+1}}{(2k+1)!}\Delta^k\nu(x,\tau)\right] (2.13)$$

қатармен анықталады.

Мысал. Теңдеу $u_{tt}=\Delta u(x,y,z,t),\ (x,y,z)\in R^3, t>0$ үшін бастапқы шарттар $u\big|_{t=0}=x^2+y^2+z^2,\ u_t(x,y,z,0)=xy$ болсын.

Бұл есепті (2.12) формуланы пайдаланып

$$u(x,y,z,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{t^{2k}}{(2k)!}\Delta^k(x^2+y^2+z^2)+\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\Delta^k(xy)\right]=$$

$=x^2+y^2+z^2+3t^2+xyt$ шешімін аламыз.

Мысал. Мына Коши есебін

$$\left.\begin{aligned} &u_{tt}=\Delta u(x_1,x_2,x_3,t)+ax_1+bt,\\ &u\big|_{t=0}=x_1x_2x_3,\quad u_t\big|_{t=0}=x_1x_2+x_3 \end{aligned}\right\}\ \text{шешіңіз.}$$

Шешу: Есептің шешімін $u = v + w$ түрінде іздейміз, мұндағы $v(x_1, x_2, x_3, t)$ функция

$$v_{tt} - \Delta v = 0, v\big|_{t=0} = x_1 x_2 x_3, v_t\big|_{t=0} = x_1 x_2 + x_3 \qquad (2.14)$$

есептің шешімі, ал $w(x_1, x_2, x_3, t)$ болса

$$w_{tt} - \Delta w = f(x_1, t), w\big|_{t=0} = w_t\big|_{t=0} = 0 \qquad (2.15)$$

есептің шешімі:

Есеп (2.14)-шешімі (2.12) қатармен өрнектеледі, ал есеп (2.15) - Дюамель қағидасын пайдаланып (2.13) қатарды интегралдап табамыз. Қосындысы есептің шешімі:

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = x_1 x_2 x_3 + t(x_1 x_2 + x_3) + \frac{1}{2} a x_1 t^2 + \frac{1}{6} b t^3.$$

Қатарлар (2.12) мен (2.13) пайдаланып мына Коши есептерін шешіңіз.

55. $u_{tt} - \Delta u = 0,\ u(x_1, x_2, x_3, 0) = e^{x_1},\quad u_t\big|_{t=0} = e^{-x_1};$

56. $u_{tt} - \Delta u = 0,\ u(x_1, x_2, x_3, 0) = \dfrac{1}{x_1},\quad u_t\big|_{t=0} = 0;$

57. $u_{tt} - \Delta u = 0,$

$u(x_1, x_2, x_3, 0) = e^{x_1} \cos x_2,\ u_t\big|_{t=0} = x_2 \cos x_3;$

58. $u_{tt} = \Delta u + \dfrac{x_1 t}{1 + t^2},$

$u(x_1, x_2, x_3, 0) = x_1 \sin x_2,\ u_t\big|_{t=0} = x_2 \cos x_3;$

59. $u_{tt} = u_{xx} + bx^2,\ u(x,0) = e^{-x},\quad u_t(x,0) = a;$

60. $u_{tt} = a^2 \Delta u,\quad u\big|_{t=0} = e^x \cos y,\quad u_t\big|_{t=0} = x^2 y^2$

61. $u_{tt} = a^2 \Delta u,\quad u\big|_{t=0} = z \cos \dfrac{1}{2}(x + y),\quad u_t\big|_{t=0} = e^{x+z}$

62. $u_{tt} = 4\Delta u + t(x^2 + y^2),\quad u\big|_{t=0} = e^{-y} \sin x,\quad u_t\big|_{t=0} = 0$

63. $u_{tt} = 9\Delta u + (x + y) z e^{-t},\ u\big|_{t=0} = 0,\ u_t\big|_{t=0} = (x + y) e^z$

64. $u_{tt} = \Delta u + 2xyz,\ u\big|_{t=0} = x^2 + y^2 - 2z^2,\ u_t\big|_{t=0} = 1$

65. $u_{tt} = \Delta u + 6te^{x\sqrt{2}} \sin y \cos z$,

$u\big|_{t=0} = e^{x+y} \cos z\sqrt{2}, u_t\big|_{t=0} = e^{3y+4z} \sin 5x$

66. $u_{tt} = a^2 \Delta u$, $u\big|_{t=0} = u_t\big|_{t=0} = x^2 + y^2 + z^2$

67. $u_{tt} = a^2 \Delta u$, $u\big|_{t=0} = u_t\big|_{t=0} = \cos\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

68. $u_{tt} = 8\Delta u + t^2 x^2$, $u\big|_{t=0} = y^2, u_t\big|_{t=0} = z^2$.

4.Жалғастыру әдістері

Мына Коши есебінде

69. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t)$, $u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x)$,

берілген белгілі функциялар $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ аргумент x бойынша тақ функция болса , онда шешім $u(0,t) = 0$, ал жұп функциялар болса, онда $u_x(0,t) = 0$. Осы тұжырымды пайдаланып төменгі шекаралық есептерді жалғастыру әдісімен шешіңдер.

70. $u_{tt} = a^2 u_{xx}, x > 0, t > 0$, $u(0,t) = 0, t > 0$,

$u(x,0) = x + 1$, $u_t(x,0) = x^2 + x$;

71. $u_{tt} = a^2 u_{xx}, x > 0, t > 0$, $u_x(0,t) = 0, t > 0$,

$u(x,0) = x + \sin x$, $u_t(x,0) = \psi(x)$;

72. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + x + t, x > 0, t > 0$, $u(0,t) = 0, t > 0$,

$u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = 0$;

73. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), x > 0, t > 0$, $u_x(0,t) = 0, t > 0$,

$u(x,0) = x^2 + x$, $u_t(x,0) = 0$;

74. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + 3xt$, $u(0,t) = 0, t > 0$,

$u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = \psi(x)$;

75. $u_{tt} = a^2 u_{xx}, x > 0, t > 0$, $u_x(0,t) = 0, t > 0$,

$$u(x,0)=1+x^2,\quad u_t(x,0)=x+2.$$

Тура толқын $f(x-at)$ көмегімен, шекаралық әсерді таратып, төмендегі есептерді шешіңдер:

76. $u_{tt}=a^2u_{xx},\ x>0,\ t>0,\quad u(0,t)=\mu(t),\ t>0,$
$u(x,0)=u_t(x,0)=0;$

77. $u_{tt}=a^2u_{xx},\ x>0,\ t>0,\quad u_x(0,t)=\nu(t),\ t>0,$
$u(x,0)=u_t(x,0)=0;$

78. $u_{tt}=a^2u_{xx},\ x>0,\ t>0,\ u_x(0,t)-hu(0,t)=\chi(t),\ t>0,$
$u(x,0)=u_t(x,0)=0.$

Төмендегі қарапайым есептер тізбегін жіктеу әдісімен шешіңдер:

79. $u_{tt}=a^2u_{xx},\quad u(0,t)=\mu(t),\ t>0,$
$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x);$

80. $u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t),\quad u_x(0,t)=\nu(t),\ t>0,$
$u(x,0)=u_t(x,0)=0;$

81. $u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t),\quad u(0,t)=\mu(t),\ t>0,$
$u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x).$

§ 2. Жалпылама Коши есебі. Гурса мен Дарбу есептері

Классикалық Коши есебінің бастапқы шарттары берілетін тұғыр $t=t_0$ жазықтығы болатын. Қолданбалы математикада бастапқы шарттар берілетін көпбейне $t=t_0$ жазықтығынан бөлекте болуы мүмкін. Бірақ кез-келген жатық көпбейне бастапқы шарттардың тұғыры бола алмайды. Берілген көпбейне S,.тұғыры болуы үшін теңдеудің сипаттаушы бетпен жанасатын ортақ нүктесі болмауы керек. Көпшілік жағдайда толқынның теңдеуі үшін бастапқы шарттар

$$Q(grad\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{x_i}^2 - a^2\varphi_t^2 < 0 \qquad (2.16)$$

теңсіздігін қанағаттандыратын бетті /кеңістік типті/ алады.

Коши есебінің жалпы қойылуы: (1.1) толқын теңдеуінің бастапқы шарттарды

$$u\big|_S = f_0(M), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_S = f_1(M) \qquad (2.17)$$

қанағаттандыратын шешімін табу мәселесін Коши есебін жалпылама қойылу есебі деп атайды.

Мұндағы $f_0(M)$, $f_1(M)$ S бетте анықталған жатық функциялар, ал $\overline{N}$ вектор S бетпен жанаспайды.

Егер $n = 1$ болса, онда (2.16) шарттың орнына $\varphi_x^2 \neq a^2\varphi_t^2$ шартты орындалатын сызықтар алса жеткілікті.

Осы Коши есебімен қатар, толқын теңдеуі үшін басқа да есептер қарастырылады. Егер сипаттаушы бет $\varphi(x,t) = 0$ конус болғанда:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0)^2 = a^2(t - t_0)^2 \qquad (2.18)$$

мына есеп қойылады: (2.1) толқын теңдеуінің (2.18) конустың ішінде

$$u\big|_S = \Phi(M) \qquad (2.19)$$

шарттың қанағаттандыратын регулярлық шешімін табу Кошидің сипаттаушы есебі деп аталады. S - конустың беті.

Егер $n = 1$ болса, онда конус (2.18) (x_0, t_0) нүктеден өтетін екі қиылысатын $x - x_0 = t - t_0$, $x - x_0 = t_0 - t$ түзулерден тұрады. Бұл түзулер R^2 жазықтықты төртбұрыштық аймаққа бөледі. Әрбір бұрыштық аймақтар үшін Гурса есебі қойылады.

Гурса есебі: $D \equiv \{(x,t) : 0 < x < \infty, -x < t < x\}$ аймақта толқын теңдеуі

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \qquad (2.20)$$

шекаралық шарттарды

$$u\big|_{x-at=0} = \varphi_1(x), \quad u\big|_{x+at=0} = \varphi_2(x), \quad \varphi_1(0) = \varphi_2(0) \quad (2.21)$$

қанағаттандыратын регулярлық шешімін табу керек.

Сипаттаушы емес беттерде шекаралық шарттар қойылатын есептер бар. Солардың ішіндегі ең қарапайымы Дарбу есебі:

Сипаттауыш $x - x_0 = t - t_0$, $x - x_0 = t_0 - t$ түзулермен шектелген Ω аймақ екі қисықтар:

$S_1: \quad t = s_1(x), \quad S_2: t = s_2(x), \quad x > x_0, \quad s_1(x_0) = s_2(x_0)$

шектелген және ол қисықтар үзіліссіз оның үстіне

$$-1 \le \frac{ds_1}{dx} < \frac{ds_2}{dx} \le 1$$

шарттарды қанағаттандырады.

Дарбу есебі: $D \equiv \{(x,t) : s_1(x) < t < s_2(x), \quad x > x_0\}$ аймақта (2.20) теңдеудің

$$u\big|_{S_1} = \psi_1(x), \quad u\big|_{S_2} = \psi_2(x), \quad x > x_0 \quad \psi_1(0) = \psi_2(0) \quad (2.22)$$

шекаралық шарттарды қанағаттандыратын регулярлық шешімін табу керек.

Мысалы. Жарты жазықтық $x > at$ аймақта теңдеудің (2.20) бастапқы

$$u\big|_{x=kt} = \varphi(x), \quad u_t\big|_{x=kt} = \psi(t), \quad k^2 \ne a^2$$

шарттарды қанағаттандыратын шешімін табу керек.

Шешуі: Шек теңдеуінің жалпы шешімі

$$u(x,t) = f(x - at) + g(x + at)$$

болғандықтан, бастапқы шарттардан

$$\begin{cases} f(x - \frac{a}{k}x) + g(x + \frac{a}{k}x) = \varphi(x), \\ -af'(x - \frac{a}{k}x) + ag'(x + \frac{a}{k}x) = \psi(x) \end{cases}$$

жүйені аламыз.

Бұл жүйеден

$$f(k_1x)=\frac{\frac{a}{k_2}\varphi(x)-\int\limits_0^x\psi(\xi)d\xi}{\left(\frac{a}{k_1}+\frac{a}{k_2}\right)},\ g(k_2x)=\frac{\frac{a}{k_1}\varphi(x)+\int\limits_0^x\psi(\xi)d\xi}{\left(\frac{a}{k_1}+\frac{a}{k_2}\right)},$$

$$k_1=\frac{k-a}{k},\quad k_2=\frac{k+a}{k}$$

жалпы функцияларды анықтап, оларды қойсақ

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\left[(a+k)\varphi\left(\frac{a(x+at)}{a+k}\right)+(a-k)\varphi\left(\frac{a(x-at)}{a-k}\right)\right]+$$

$$+\frac{a^2-k^2}{4a^3}\int\limits_{\frac{a(x-at)}{a-k}}^{\frac{a(x+at)}{a+k}}\psi(\xi)d\xi$$

есептің шешімін анықтаймыз.

Томендегі Кошидің жалпы қойылған есептерін шешіңдер:

82. $u_{tt}=9u_{xx},\ -\infty<x<\infty,\ t<x,\ u\big|_{x=t}=\varphi(x),\ u_t\big|_{x=t}=0;$

83. $u_{tt}=4u_{xx},\qquad u\big|_{x=-t}=0,\quad u_t\big|_{x=-t}=\psi(x);$

84. $u_{tt}=u_{xx},\qquad u\big|_{x=t}=\varphi(x),\quad u_t\big|_{x=t}=\psi(x);$

85. $u_{tt}=3u_{xx}+6xt,\qquad u\big|_{x=t}=0,\quad u_t\big|_{x=t}=0;$

86. $u_{tt}=4u_{xx}+xe^{-t},\qquad u\big|_{x=3t}=0,\quad u_t\big|_{x=3t}=xe^{-x/3}.$

87. Берілген $x^2+y^2=4$ шеңбер доғасының қандай бөліктері теңдеу $u_{tt}=u_{xx}$ үшін жалпы қойылған Коши есебінің бастапқы шарттар тұғыры бола алады? (2.17) шарттардағы $\overline{N}$ бағыт шеңбердің нормалы болғанда Кошидің жалпы қойылған есебін шешіңдер.

88. Коэффициенттері A, B, C үшін қандай шарт орындалғанда жазықтың $Ax+By+Ct=0$ жалпы қойылған Коши есебінің бастапқы шарттары (2.17) тұғыры бола алады? Бастапқы шарттар

$$u\big|_S = -\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y, \quad \frac{\partial u}{\partial N}\bigg|_S = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$ түрінде

берілген Коши есебін шешіңдер.

89. Егер $\Phi(x,y,t)$ – $(n-2)$ дәрежелі біртекті полином болса, онда

$$u(x,y,t) = \sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k \rho^{2k+2}\Pi^k\Phi}{(2k+2)!!\{(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-(2k+1))\}} \quad (2.23)$$

біртекті емес теңдеу

$$u_{xx}+u_{yy}-u_{tt}=\Phi(x,y,t)$$

шешімі болатынын тексеріңдер. Мұнда $\rho^2 = x^2+y^2-t^2$, $\Box u = u_{xx}+u_{yy}-u_{tt}$ толқын операторы.

90. Біртекті емес теңдеуді

$$u_{tt} = \Delta u + xyt$$

сипаттаушы конус $S:\ x^2+y^2-t^2=0$ шекарасында берілген $u\big|_S = 0$ шарт орындалатын шешімін табыңдар.

Төмендегі Дарбу мен Гурса есептерін шешіңдер:

91. $u_{xy}=0, \quad 0<y<\alpha x, \quad x>0, \quad y>0,$

$$u\big|_{y=0} = f(x), \quad u\big|_{y=ax} = g(x), \quad f(0)=g(0).$$

92. $u_{xy}=0, \quad y>\alpha x, \quad x>0, \quad \alpha<0;,$

$$u\big|_{x=0}=0, \quad u\big|_{y=ax}=0.$$

93. $u_{xy}+u_x = x, \quad x>0, \quad y>0;\ u\big|_{x=0}=y^2, \quad u\big|_{y=0}=x^2.$

94. $u_{xy}+x^2yu_x=0, \quad x>0, \quad y>0;\ u\big|_{x=0}=0, \quad u\big|_{y=0}=x.$

95. $u_{xy}+u_y=1, \quad x>0, \quad y>0,$

$$u\big|_{x=0}=\varphi(y),\quad u\big|_{y=0}=\psi(x),\quad \varphi(0)=\psi(0);$$

96. Сипаттаушылары $x-at=0,\quad x+at=0$ берілген, шекаралық

$$u\big|_{x=at}=\varphi(x),\quad u\big|_{x=-at}=\psi(x),\quad 0<x<\infty,$$

және үйлесімділік

$$\varphi(0)=\psi(0)$$

шарттарды қанағаттандыратын (2.20) теңдеу шешімін табыңдар.

97. Егерде № **96** есепте $\varphi(x),\quad \psi(x)$ функциялары сәйкес $(0,p)$, $(0,q)$ аймақта анықталса, онда толқынның таралу аймағын табыңдар.

98. Сипаттаушылармен $x-at=0,\quad x+at=0$, $x-at=d,\quad x+at=d$ шектелген төртбұрышта (2.20) теңдеуі үшін Дирихле есебі қисынды қойылған ба?

99. Бірінші ширек $(t>0,\quad x>0)$ аймақта $u_{tt}=4u_{xx}$ теңдеу үшін шарттар

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad 0<x<\infty,\quad u(0,t)=\psi(t),\quad 0<t<\infty,$$
$$\varphi(0)=\psi(0),\quad \varphi''(0)=\psi''(0)$$

берілсе, шекаралық есеп қисынды бола ма?

100. $x=0$ мен $x=2t$ түзулермен шектелген бұрышты аймаққа $u_{tt}=u_{xx}$ теңдеу мына

$$u(0,t)=\varphi(t),\quad u(x,\frac{x}{2})=\psi(x),\quad \varphi(0)=\psi(0)$$

шарттармен берілсе, шекаралық есеп қисынды болады ма?

101. $t=0$ мен $t={x}/{2}$ түзулермен шектелген бұрышта мына $u_{tt}=4u_{xx}$, $u(x,0)=\varphi(x),$,

$$u(x,\frac{x}{2})=\psi(x),\quad 0<x<d,\quad \varphi(0)=\psi(0)$$

есептің шешімін және шешімнің таралу Ω аймағын анықтаңдар.

102. Түзулермен $x=0,\quad t=x$ шектелген аймақта мына

$u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 \le t < 2, \quad u(x,0) = sin t, \quad u(t,t) = t$ есепті шешіңдер және шешімнің таралу Ω аймағын анықтаңдар.

103. $x - at = 0$ мен $x + at = 0$ сипаттаушыларда мына

$$u|_{x=at} = \varphi(x), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{x=-at} = \psi(x), \quad 0 < x < \infty$$

шарттарды қанағаттыратын (2.20) теңдеудің шешімін табыңдар.

104. $x - at = 0$ мен $t = 0$ түзулермен шектелген аймақта мына

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 < x < 1, \quad u|_{x=at} = \psi(x), \quad 0 < x < 2$$

шарттарды қанағаттандыратын (2.20) теңдеудің шешімін және шешімнің таралу Ω аймағын анықтаңдар.

105. Ω: $x + 2t = 0, \quad x + 2t = 0$,

$x - 2t = d, \quad x + 2t = 2d$ түзулер шектелген аймақ.

$x = 0$ мен $x = 3t$ түзулермен шектелген бұрышта мына есепті

$$u_{tt} = 9u_{xx}, \quad u(0,t) = t^2, \quad u(3t,t) = t^3, \quad 0 < t \le 3$$

шешіңдер және шешімнің таралу аймағын анықтаңдар.

Кейбір шекаралық есептерді шешу мәселесі мынандай

$$P(x) + \mu P[\lambda(x)] = f(x) \tag{2.24}$$

функционалдық теңдеуді шешуге келтіріледі.

Егерде

$$\left|\mu^m f(\lambda^m(x))\right| \le M^m, \quad 0 < M < 1$$

шарт орындалса, онда (2.24) теңдеуді итерациялық әдіспен шешуге болады және шешімі

$$P(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \mu^m f(\lambda^m(x)) \tag{2.25}$$

формуламен анықталады.

Мұнда $\lambda^m(x) = \lambda^{m-1}(\lambda(x)), \quad \lambda^0(x) = x$.

(2.25) өрнекті пайдаланып, мына есепті шешіңдер:

106. Түзулер $t = k_1 x$, $t = k_2 x$, $-\frac{1}{2} \le k_1 < k_2 \le \frac{1}{2}$

шектелген аймақта Дарбу есебі

$u_{tt} = 4u_{xx}$, $x > 0$, $u(x, k_1 x) = \varphi(x)$, $u(x, k_2 x) = \psi(x)$, $\varphi(0) = \psi(0)$

үшін (2.24) функционалдық теңдеуді анықтаңдар және Дарбу есебінің шешімін табыңдар, егерде

а) $k_1 = 0$, $k_2 = k > 0$ болса;

б) $k_1 = -\frac{1}{4}$, $k_2 = \frac{1}{4}$, $\varphi(x) = \psi(x) = x$ болса;

в) $k_1 = -\frac{1}{2}$, $k_2 = \frac{1}{2}$ болса.

107. Түзулер $t = 0$, $t = \frac{1}{4}x$ шектелген аймақта Дарбу

есебін

$u_{tt} = 4u_{xx}$, $x \ge 0$, $u(x,0) = \cos x$, $u(x, x/4) = x$ шешіңдер.

108. Түзулер $t = 0$, $t = \frac{1}{3}x$ шектелген аймақта Дарбу

есебін

$u_{tt} = u_{xx}$, $0 < x < 1$, $u(x,0) = \varphi(x)$, $u(x, x/3) = \psi(x)$ шешіңдер және шешімнің таралу Ω аймағын анықтаңдар.

§3. Риман функциясы әдісі

Сызық Г және $M(\xi, \eta)$ нүктеден өтетін сипаттаушылармен шектелген D аймақта

$$L_{xy}u(x,y) \equiv u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y) \quad (2.26)$$

теңдеуді қанағаттандыратын және Г сызықта $u|_\Gamma, u_x|_\Gamma, u_y|_\Gamma$ шамалар белгілі u(x,y) функцияны табу керек; әрине, Г сызықта

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} y'(x)\Big|_\Gamma = \frac{du}{dx}\Big|_\Gamma$$

шарт орынды, мұндағы y=y(x) функция Г сызықтың теңдеуі.

Бұл есепті шешу үшін, оның шешуі бар деп жорамалдап, қосымша $v = R(x,y;\xi,\eta)$ функцияны төмендегі шарттарды:

1). $L^*_{xy} R(x,y;\xi,\eta)=0$; (2.27)

2). $R_x(x,y;\xi,\eta) - b(x,y)R(x,y;\xi,\eta) = 0$, егер $y=\eta$ (яғни MA түзуде);

3). $R_y(x,y;\xi,\eta) - a(x,y)R(x,y;\xi,\eta) = 0$, егер $x=\xi$ (яғни BM түзуде);

4). $R(\xi,\eta;\xi,\eta)=1$

қанағаттандыратындай алсақ Коши есебінің шешуі мына Риман формуласымен

$$u(M) = \frac{1}{2}\left[u(A)R(A;M) + u(B)R(B;M)\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{AB}\left[(R\,u_x - R_x\,u + 2bR\,u)dx - (R\,u_y - R_y\,u - 2aR\,u)dy\right] +$$

$$+\iint_D R\,f\,dxdy \tag{2.28}$$

анықталады. Бұл жерде біз 2), 3) шарттар жай дифференциалдық теңдеулер болғандықтан 4)-шартты пайдаланып

$$R(x,\eta;\xi,\eta) = \exp\int_\xi^x b(\lambda,\eta)d\eta, \tag{2.29}$$

$$R(\xi,y;\xi,\eta) = exp\int_\eta^y a(\xi,\lambda)d\lambda$$

теңдіктерді қолдандық.

(2.26) теңдеу үшін Гурса есебінің $x = x_0$, $y = y_0$ сипаттаушыда берілген

$$u(x,y_0) = \varphi(x), \quad u(x_0,y) = \psi(x), \quad \varphi(x_0) = \varphi(y_0)$$

қанағаттандыратын шешімі мына формуламен анықталады:

$$u(x,y) = R(x,y_0;x,y)\varphi(x) +$$

$$+R(x_0,y;x,y)\psi(x)-R(x_0,y_0;x,y)\varphi(x_0)+$$

$$+\int_{x_0}^{x}\left[b(\xi,y_0)R(\xi,y_0;x,y)-\frac{\partial}{\partial\xi}R(\xi,y_0;x,y)\right]\varphi(\xi)d\xi+$$

$$+\int_{y_0}^{y}\left[a(x_0,\eta)R(y_0,\eta;x,y)-\frac{\partial}{\partial\eta}R(x_0,\eta;x,y)\right]\psi(\eta)d\eta+$$

$$+\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}f(\xi,\eta)R(\xi,\eta;x,y)d\xi d\eta$$

Демек, Коши мен Гурса есебтерін шешімін Риман функциясы әдісімен шешу мәселесі $v=R(x,y;\xi,\eta)$-Риман функциясын құруға келеді екен.

1-мысал. $L_{xy}u\equiv u_{xy}=0$ теңдеу үшін Коши есебін шешейік. (2.27) шарттармен (2.29) өрнектерді пайдалансақ $L^*_{xy}R(x,y;\xi,\eta)\equiv R_{xy}=0,\ R(x,\eta;\xi,\eta)=1$ және $R(\xi,y;\xi,\eta)=1$, демек $R(x,y;\xi,\eta)\equiv 1$.

Олай болса Риман формуласы (2.28) бойынша

$$u(M)=\frac{1}{2}[u(A)+u(B)]+\frac{1}{2}\int_{AB}[u_x dx-udy],$$

жаңа айнымалыларды x+y=X, x-y=T деп енгізейік, онда $u_{xy}=0$ теңдеу $u_{TT}-u_{xx}=0$ түрге айналады да, оның шешімі

$$u(M)=\frac{1}{2}[u(A)+u(B)]+\frac{1}{2}\int_{AB}(u_x+u_T)\frac{1}{2}(dx+dT)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{AB}(u_x-u_T)\frac{1}{2}(dx-dT)=$$

$$=\frac{1}{2}[u(A)+u(B)]+\frac{1}{2}\int_{AB}(u_T dx+u_x dT),$$

Егер бастапқы сызық үшін T=0 (x=y) өсті алсақ,, онда dT=0 және M нүктенің координатасын (X,T) деп алсақ, онда

A,B сипаттаушылардың T=0 өспен қиылысу нүктелері A(X-T,0), B(X+T,0), демек Коши есебінің шешімі

$$u(X,T)=\frac{1}{2}[u(X-T,0)+\overline{U}(X+T,0)]+\frac{1}{2}\int_{X-T}^{X+T}u_T(\lambda,0)d\lambda,$$

ал бұл кәдімгі Даламбер формуласы.

2-мысал. $L_{xy}u=x^2u_{xx}-y^2u_{yy}=0$ (2.30)

теңдеудің $u\big|_{y=1}=f(x),u_y\big|_{y=1}=F(x)$ (2.31)

шарттарды қанағаттандыратын шешімін табу керек.

Бұл (2.30)-теңдеуді $\xi=xy,\eta=y/x$ алмастырулар арқылы

$$u_{\xi\eta}-\frac{1}{2\xi}u_\eta=0 \qquad (2.32)$$

канондық түрге келтіреміз.

Ескі координата бойынша y=1 түзу жаңа координатада

$$\xi\eta=1 \qquad (2.33)$$

тең бүйірлі гиперболаға айналады.

Ал $x=\sqrt{\frac{\xi}{\eta}}$ және $y=\sqrt{\xi\eta}$ өрнектерден

$$\frac{\partial u}{\partial\xi}\Big|_{\xi\eta=1}=\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2\xi}\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{\xi\eta=1}=\frac{1}{2}f'(\xi)+\frac{1}{2\xi}F(\xi), \qquad (2.34)$$

$$\frac{\partial u}{\partial\eta}\Big|_{\xi\eta=1}=-\frac{\xi^2}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\xi}{2}\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{\xi\eta=1}=-\frac{\xi^2}{2}f'(\xi)+\frac{\xi}{2}F(\xi), \qquad (2.35)$$

және $u\big|_{\xi\eta=1}=f(\xi)$. (2.36)

Енді (2.30)-(2.31) есеп бойынша Риман формуласына $a=0,b=-\frac{1}{2\xi},f=0$ екенін ескерсек, онда

$$u(\xi_{0,}\eta_0)=\frac{1}{2}\left[(uv)_B+(uv)_A\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{AB}\left[\left(v\frac{\partial u}{\partial\xi}-u\frac{\partial v}{\partial\xi}-\frac{uv}{\xi}\right)d\xi-\left(v\frac{\partial u}{\partial\eta}-u\frac{\partial v}{\partial\eta}\right)d\eta\right]. \qquad (2.37)$$

Ал Риман функциясын $v(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$ анықтау үшін жоғарыдағы 1)-4) қасиеттері бойынша ол түйіндес

$v_{\xi\eta}+\frac{1}{2\xi}v_\eta=0$ теңдеуін және сипаттаушыда

$$v(\xi,\eta_0;\xi_0,\eta_0)=e^{-\int_{\xi_0}^{\xi}\frac{d\xi}{2\xi}}=\sqrt{\xi_0/\xi}\text{ , егер МА-да болса;} \qquad (2.38)$$

$$v(\xi_0,\eta;\xi_0,\eta_0)=e^{\int_{\eta_0}^{\eta}0d\eta}=1\text{ , егер МВ-да болса.} \qquad (2.39)$$

Сонымен іздеп отырған Риман функциясы

$$v(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)=\sqrt{\xi_0/\xi} \qquad (2.40)$$

екеніне оңай көзіңізді жеткіземіз. Сондықтан (2.34),(2.35),(2.36) және (2.40) өрнектерді (2.37) формулаға қойып және $u(B)=f(\xi_0),u(A)=f(1/\eta_0)$,

$$v(B)=v(\xi_0,\frac{1}{\xi_0};\xi_0,\eta_0)=1\text{ , }v(A)=v(\frac{1}{\eta_0},\eta_0;\xi_0,\eta_0)==\sqrt{\xi_0\eta_0}$$

теңдіктерді ескерсек, онда (2.37) мынадай

$$u(\xi_{0,}\eta_0)=\frac{f(\xi_0)}{2}+\frac{\sqrt{\xi_0\eta_0}}{2}f(\frac{1}{\eta_0})+$$

$$+\frac{\sqrt{\xi_0}}{4}\int_{\xi_0}^{1/\eta_0}\frac{f(\xi)}{\xi^{3/2}}d\xi-\frac{\sqrt{\xi_0}}{2}\int_{\xi_0}^{1/\eta_0}\frac{F(\xi)}{\xi^{3/2}}d\xi$$

түрге келеді. Ескі х,у айнымалыларға өтсек

$$u(x,y)=\frac{1}{2}f(x,y)+\frac{y}{2}f(\frac{x}{y})+\frac{\sqrt{xy}}{4}\int_{xy}^{x/y}\frac{F(z)}{z^{3/2}}dz$$

түріндегі есептің шешімін аламыз.

Жоғарыдағы Риман функциясы қасиеттерін және келтірілген мысалдарды үйрене отырып, мына есептерді шешіңіз.

109. Мына $u_{xx}-u_{tt}+\lambda u=0$ теңдеудің $\xi=x+t,\eta=x-t$ айнымалылар үшін Риман функциясы

$$R(\xi,\eta;x,y)=\mathrm{I}_0(\mu\sqrt{(\xi-\xi_1)(\eta-\eta_1)})$$

болатынын тексеріңіз, мұндағы $\mu^2=-\lambda$, ал I_0 -Бессельдің нөлінші ретті функциясы.

110. $u_{xx}-u_{tt}+\lambda u=0$ теңдеудің

$$u(x,0)=\varphi(x),u_t(x,0)=\psi(x)$$

шарттарды қанағаттандыратын шешімін 109 есептегі Риман функциясын пайдаланып шешіңдер.

111. $u_{xx}-u_{tt}+\lambda u=1$ теңдеудің $u(x,x)=u(x,-x)=0$ шарттарды қанағаттандыратын шешімін 109 есепті пайдаланып шешіңіз.

112. $u_{xy}+2u_x+u_y+2u=1,\quad 0<x,y<1$,

$$u|_{x+y=1}=x,\quad u_x|_{x+y=1}=x;$$

113. $xyu_{xy}+xu_x-yu_y-u=2y,\quad 0<x,y<\infty$,

$$u|_{xy=1}=1-y,\quad u_y|_{xy=1}=x-1;$$

114. $u_{xy}+\dfrac{1}{x+y}(u_x+u_y)=2,\quad 0<x,y<\infty$,

$$u|_{y=x}=x^2,\quad u_x|_{y=x}=1+x;$$

115. $2u_{xy}-e^{-x}u_{yy}=4x,\quad -\infty<x,y<\infty$

$$u|_{y=x}=x^5\cos x,\quad u_x|_{y=x}=x^2+1$$

Жауаптары

1. (x^0, t_0) нүкте үшін $t=0$ көпбейнеде тәуелділік аймақтары:

$n=1,\quad \left|x-x^0\right|^2 \le a^2 t_0^2,$ - кесінді $(x_0 - at_0, x_0 + at_0)$;

$n=2,\quad (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \le a^2 t^2$ - дөңгелек;

$n=3,\quad (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 \le a^2 t^2$ -шар.

2. а) Параллелограмм:

$\{x-2t=a,\quad x+2t=b,\quad x+2t=a,\quad x-2t=b\};$

б)Квадрат:

$$\left\{x-\frac{\sqrt{10}}{3}t=2,\quad x+\frac{\sqrt{10}}{3}t=2,\quad x-\frac{\sqrt{10}}{3}t=3,\quad x+\frac{\sqrt{10}}{3}t=3\right\}$$

t өсін айналған дене-тор;

с) Конустар

$$1-t=2\sqrt{x^2+y^2+z^2},\quad (0<t<1) \text{ мен}$$

$$1+t=2\sqrt{x^2+y^2+z^2},\quad (-1<t<0)$$

шектелген аймақ;

3. а) $t\ge 0$ түзулер $x+3t=l_1$ мен $x-3t=l_2$ шектелген аймақ, $t\le 0$ түзулер $x-3t=l_1$ мен $x+3t=l_2$ шектелген аймақ;

б) $t\ge 0$, $x^2+y^2=(l+t)^2$ конустың іші,

$t\le 0$, $x^2+y^2=(l-t)^2$ конустың іші;

с) $t>1,\quad x-t=-1,\quad x+t=1$ түзулермен шектелген,

$t<1,\quad x-t=1,\quad x+t=-1$ түзулермен шектелген;

4. $$\begin{cases} x^3+3xt^2,\quad x^2y+yt^2,\quad xy^2+xt^2, \\ y^3+3yt^2,\quad x^2t+\frac{1}{3}t^3,\quad y^2t+\frac{1}{3}t^3,\quad xyt; \end{cases}$$

5. $a^2\sum_{i=1}^{n} m_i^2 = m_{n+1}^2$;

6. $a = \dfrac{|m|}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_n^2}}$;

7. а) толқын есмес; б) толқын емес; с) $a = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; г) $a = 1$.

10. $u(x, y) = \Phi(y - x + \cos x) + \Psi(y - x - \cos x)$;

11. $u(x, y) = 2e^x + e^{\frac{(x+2y)}{2}}\varphi(y) + \psi(x + 2y)$;

12. $u(x, y) = \varphi(y) + \psi(x)e^{-ay}$;

13. $u(x, y) = e^{x+y} + [\varphi(x) + \psi(y)]e^{3x+2y}$;

14. $u(x, y) = [\varphi(x) + \psi(y)]e^{-bx-ay}$;

15. $u(x, y) = x\varphi(y) - \varphi'(y) + \int_0^x (x - \xi)\psi(\xi)e^{\xi y} d\xi$,

нұсқау: $u_x = v$ деп алмастырып $\Rightarrow u = xv - v_y$, $v_{xy} - xv_x = 0$;

16. $u(x, y) = \sin x + yg(x) + g'(x) + \int_0^y f(\eta)(y - \eta)e^{-x\eta} d\eta$;

17. $u(x, y) = f(x + \operatorname{arctg} y) + g(x - \operatorname{arctg} y)$;

18. $u = e^{y-2x} f(x + y) + g(2x - y)$;

19. $u(x, y) = e^{x+y} f(y - 3x) + (x + y - 1)(y - 3x) + g(x + y)$;

20. $u(x, y) = x - y + \varphi(x - 3y) + \psi(2x + y)e^{\frac{3y-x}{7}}$;

21. $u(x, y) = \phi(xy) + \sqrt{|xy|}\,\psi\left(\dfrac{x}{y}\right)$, бұл әрбір квадрантта.

22. $u(x, y) = f(y + e^x) + g(y) + \dfrac{y^2}{2}(y + e^x)$;

23. $u(x,y)=e^{\frac{1}{2}(x+y+\cos y)}f(x-y+\cos y)+g(x+y+\cos y)$;

24. $u=\sin y-1+e^{x-y}$;

25. $u=x-y-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}e^{2y}$;

26. $u=(y-3x)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\quad (y<3)$;

27. $u=\dfrac{1}{2}x^2(e^y-1)+\sin x+\dfrac{x^3-(x+e^y-1)^3}{6}+$

$+\operatorname{arctg}(x+e^y-1)-\operatorname{arctg}x$;

28. $u=\dfrac{x^2}{y}\quad (y>0)$;

29. $u=2x+y-x^2$;

30. $u=\dfrac{5}{2}\sin\dfrac{x+y}{2}-\dfrac{3}{2}\sin\dfrac{5x+y}{6}$;

31. $u=\dfrac{y}{3x}+\dfrac{2x^2y}{3}\quad (x>0)$;

32. $u=\dfrac{4}{5}\left(y^{4/5}-|x|^{5/2}\right)\quad (0<y<1)$;

33. $u=e^x sh\left(\dfrac{y-\cos x}{2}\right)+\sin\left(\dfrac{y-\cos x}{2}\right)$;

34. $u=\dfrac{1}{2}[\cos(x+t)+\cos(x-t)]$;

35. $u=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{1+(x+t)^2}+\dfrac{1}{1+(x-t)^2}\right]+\dfrac{1}{2}[\sin(x+t)-\sin(x-t)]$;

36. $u=x^2+xt+4t^2+\dfrac{1}{6}xt^3$;

37. $u=\sin x$;

38. $u = xt + \sin(x+t) - (1 - ch\,t)e^x$;

39. $u = at + a(e^{-t} - 1) + b\sin x\cos t + c\cos x\sin t$;

40. $u = \frac{1}{2}t^2\left(x^3 - 3xy^2\right) + e^x\cos y + te^y\sin x$;

41. $$u = \cos(bx+cy)\cos\left(at\sqrt{b^2+c^2}\right) + \frac{1}{a\sqrt{b^2+c^2}}\sin(bx+cy)\sin\left(at\sqrt{b^2+c^2}\right);$$

42. $u = \left(x^2 + y^2 + 4a^2\right)\left(e^t - 1 - t\right) - 2a^2t^2\left(1 + \frac{1}{3}t\right)$;

43. $u = y^2 + tz^2 + 8t^2 + \frac{8}{3}t^3 + \frac{1}{12}t^4x^2 + \frac{2}{45}t^6$;

44. $u = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\left(e^t - 1 - t\right) - a^2t^2(3+t)$;

45. $u = \varphi\left(\frac{2x-3y}{2}\right)$;

46. $u = 2\cos y - x\sin y + x + 2y$;

47. $u = e^{3x}\left(y - e^{-y}\right) - e^{-x}$;

48. $u = e^y\sin\left(x - \frac{y}{2}\right)$;

49. $u = \varphi\left(\frac{x+3y}{4}\right)e^{y(x+3y) - \frac{(x+3y)^2}{4}}$;

50. $u = \cos(x-y)e^{y\sin(x-y)}$;

51. $u = (5x+4y)e^{2y}$;

52. $u = 5e^{\frac{3x+15y}{10}} + 3x - 5$.

54.

$$u(r,t)=\frac{(z+at)\varphi(r+at)+(r-at)\varphi(r-at)}{2r}+\frac{1}{2ra}\int_{r-at}^{r+at}\eta\varphi(\eta)d\eta;$$

$\varphi(r)\in C^3 \quad (r>0), \quad \varphi(r)\in C^2 \quad (r>0) \quad \varphi'(0)=\psi'(0)=0.$

55. $u=e^{x_1}cht+e^{-x_1}sht;$

56. $u=\frac{x_1}{x_1^2-t^2};$

57. $u=e^{x_1}\cos x_2+x_2\cos x_3\sin t;$

58. $u=x_1\sin x_2\cos t+x_2\cos x_3\sin t+x_1\left[\frac{t}{2}\ln\left(1+t^2\right)-t+arctgt\right];$

59. $u=at+\frac{1}{2}bx^2t^2+\frac{1}{12}bt^4+e^{-x}cht;$

60. $u(x,y)=e^x\cos y+atx^2y^2+\frac{(at)^3}{3}(x^2+y^2)+\frac{(at)^5}{15};$

61. $u(x,y)=z\cos\frac{1}{2}(x+y)e^{-\frac{at}{2}}+e^{x+y}sh\,at;$

62. $u(x,y)=e^{-y}\sin x+(x^2+y^2)\frac{t^3}{3}+\frac{4t^5}{15};$

63. $u(x,y)=(x+y)e^z sh\,3t+3(x+y)z\left[e^t(t+1)-1\right];$

64. $u=x^2+y^2-2z^2+t+t^2xyz;$

65. $u=e^{x+y}\cos\left(z\sqrt{2}\right)+te^{3y+4z}\sin 5x+t^3e^{x\sqrt{2}}\sin y\cos z;$

66. $u=(1+t)(x^2+y^2+z^2)+10a^2t^2\left(1+\frac{1}{3}\right)(x^2+y^2+z^2)+$

$+a^4t^4(5+t)$

67. $u=(\cos at+\frac{1}{2}\sin at)\cos\sqrt{x^2+y^2+z^2}+$

$$+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}t\cos at\sin\sqrt{x^2+y^2+z^2}-$$

$$-\left(at\sin at+\frac{1}{a}\sin at\right)\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\sin\sqrt{x^2+y^2+z^2};$$

68. $u=y^2+tz^2+8t^2+\frac{8}{3}t^3+\frac{1}{12}t^4x^2+\frac{2}{45}t^6;$

70. $u(x,t)=\begin{cases} x+1+(x^2+x)t+\frac{a^2}{3}t^3, \text{егер} \quad x>0, \quad t<\frac{x}{a}; \\ x+\frac{1}{3a}x^3+(at^2+t)x, \text{егер} \quad x>0, \quad t>\frac{x}{a}; \end{cases}$

71.

$$u(x,t)=\begin{cases} x+\sin x\cos at+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz, \text{егер}\, x>0, t<\frac{x}{a}; \\ at+\cos x\sin at+\frac{1}{2a}\left[\int\limits_{0}^{x+at}\psi(z)dz+\int\limits_{0}^{at-x}\psi(z)dz\right], \\ \qquad \text{егер}\, x>0, t>\frac{x}{a}; \end{cases}$$

72.

$$u(x,t)=\begin{cases} \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2}xt^2+\frac{1}{6}t^3, \text{егер}\; x>0,\, t<\frac{x}{a}; \\ \frac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2}+\frac{1}{2a}\left[\frac{3a+2}{3a^2}x^3+\frac{4at-3x}{a}xt\right], \\ \qquad x>0, t>\frac{x}{a}; \end{cases}$$

$$73.\ u(x,t)=\begin{cases} x^2+2x+(at)^2+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^t d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(z,\tau)dz, \\ \qquad\qquad \text{егер } x>0,\ t<\dfrac{x}{a}; \\ x^2+(at)^2+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^{t-\frac{x}{a}} d\tau\left[\int_0^{x+a(t-\tau)} f(z,\tau)dz+\int_0^{a(t-\tau)-x} f(z,\tau)dz\right]+ \\ +\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{t-x/a}^{t} d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(z,\tau)dz,\ \text{егер } x>0,\ t>\dfrac{x}{a}; \end{cases}$$

$$74.\qquad u(x,t)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}xt^2+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz,\ \text{егер } x>0,\ t<\dfrac{x}{a}; \\ \dfrac{x}{2}\left[t^3-\dfrac{x^3}{a^3}\right]+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{at-x}^{x+at}\psi(z)dz,\ \text{егер } x>0,\ t>\dfrac{x}{a}; \end{cases}$$

$$75.\qquad u(x,t)=\begin{cases} 1+x^2+(at)^2+xt+2t,\ \text{егер } x>0,\ t<\dfrac{x}{a}; \\ 1+x^2+(at)^2+\dfrac{x^2+(at)^2+4at}{2a}, \\ \text{егер } x>0,\ t>\dfrac{x}{a}; \end{cases}$$

$$76.\qquad u(x,t)=\begin{cases} \mu(t-x/a),\quad \text{егер}\quad t>\dfrac{x}{a}; \\ 0,\quad \text{егер}\quad t<\dfrac{x}{a}; \end{cases}$$

77. $$u(x,t)=\begin{cases} -a\displaystyle\int_0^{t-x/a}\nu(z)dz, & \text{егер} \quad t>\dfrac{x}{a}; \\ 0, & \text{егер} \quad 0<t<\dfrac{x}{a}; \end{cases}$$

78. $$u(x,t)=\begin{cases} -ae^{h(x-at)}\displaystyle\int_0^{t-x/a}\chi(z)e^{ahz}dz, & \text{егер} \quad t>\dfrac{x}{a}; \\ 0, & \text{егер} \quad 0<t<\dfrac{x}{a}; \end{cases}$$

79. $$u(x,t)=\begin{cases} \dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi, \text{егер} \quad t<\dfrac{x}{a}; \\ \dfrac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{at-x}^{x+at}\psi(z)dz+\mu(t-x/a), \\ \qquad t>\dfrac{x}{a}; \end{cases}$$

82. $$u(x,t)=2\varphi\left(\frac{3t+x}{4}\right)-\varphi\left(\frac{3t-x}{2}\right).$$

83. $$u(x,t)=\frac{3}{4}\int_{-(x+2t)}^{\frac{(x-2t)}{3}}\psi(\xi)d\xi.$$

84. Шешуі барлық уақытта бола бермейді. Егер

$\varphi(x)=f(0)+2f'(0)x+2\displaystyle\int_0^x\psi(\xi)d\xi$, онда шешімі

$$u(x,t)=f(x-t)+f'(0)(x+t)+2\int_0^{\frac{(x+t)}{2}}\psi(\xi)d\xi,$$ мұндағы

$f(x)$ - кез - келген функция.

85. $$u(x,t)=\frac{2\sqrt{3}-5}{4\sqrt{3}}\left(\frac{x-t\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\right)^4+\frac{5+2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}\left(\frac{x+t\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^4$$

86. $$u(x,t)=xe^{-t}-\frac{x-2t}{2}e^{-(x-2t)}-\frac{x+2t}{2}e^{\frac{(x+2t)}{5}}.$$

87. $A_1(\sqrt{2},\sqrt{2})$ мен $A_2(-\sqrt{2},\sqrt{2})$, $A_2(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ мен $A_3(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$, $A_3(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$ мен $A_4(\sqrt{2},-\sqrt{2})$, $A_4(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ мен $A_1(\sqrt{2},\sqrt{2})$ нүктелермен шектелген доғаларының ішкі нүктелері тұғыр бола алады;

$$u(P)=\frac{1}{2}f_0(Q_1)+\frac{1}{2}f_0(Q_2)+$$

$$+\int_{Q_1}^{Q_2}\left[\cos 2\theta\ f_0(\xi,\eta)-\sin 2\theta\ f_1(\xi,\eta)\right]d\theta,$$

$P(x,t)$ нүктеден өтетін сипаттауыш $\xi-x=t-\tau$ пен $\xi-x=\tau-t$ доғамен Q_1 мен Q_2 қиылысады, $\xi=\cos\theta$, $\eta=\sin\theta$.

88. $A^2+B^2-C^2<0$, $u(x,y,t)=t$

90. $$u(x,y,t)=\frac{xyt}{18}(t^2-x^2-y^2).$$

91. $$u(x,y)=f(x)+g(\frac{y}{\alpha})-f(\frac{y}{\alpha}),$$ мұндағы

$f,g\in C^2(x>0)\cap C(x\geq 0)$.

92. $u(x,y)=f_2(\alpha x)+f_2(y)$ түріндегі шешімді анықтаймыз.

93. $u = y^2 + \frac{x^2}{2}\left(e^{-y} + 1\right).$

94. $u(x,y) = \int\limits_0^x e^{-\frac{\xi^2 y^2}{2}} d\xi .$

95. $u = y + \psi(x) + (\varphi(y) - \varphi(0) - y)e^{-x}$

96. $u = \varphi\left(\frac{x+at}{2}\right) + \psi\left(\frac{x-at}{2}\right) - \varphi(0).$

97. Ω аймақ $x - at = 0, \quad x + at = 0$,

$x - p = a(p - t), \quad x - q = a(t + q)$ түзулермен шектелген.

98. Қисынды емес. Себебі, кез - келген іргелес жатқан екі сипаттаушыда берілген шарттар есепті толық анықтайды.

99. Қисынды болмайды, себебі, біртекті есептің шешуі көп:

$$\begin{cases} g(x+2t) - g(x-2t), & x > 2t, \\ g(x+2t) - g(2t-x), & x < 2t, \end{cases}$$

мұндағы $g(x)$ - кез - келген функция.

100. Қисынды емес. Себебі біртекті есептің шешімі көп:

$$u(x,t) = \begin{cases} g(x+t) - g(t-x), & t > x; \\ g(x+t) - g(3(x-t)), & x > t, \end{cases}$$

мұндағы $g(x)$ - кез - келген функция.

101. $u(x,t) = \psi\left(\frac{x+2t}{2}\right) - \psi\left(\frac{x-2t}{2}\right) + \varphi(x - 2t).$

102. $u = sin(t - x) + x$,

$\Omega:\quad x + t = 0, \quad x - t = 0, \quad t - x = 1, \quad x + t = 4$ қоршалған аймақ.

103. $u(x,t) = \varphi\left(\frac{x+at}{2}\right) + \frac{1}{2}\int\limits_0^{x-at}\psi(\xi)d\xi\ ;$

104. $u(x,t) = \psi\left(\frac{x+at}{2}\right) - \psi(0) + \psi\left(\frac{x-at}{2}\right) - \frac{1}{a}\int\limits_0^{x-at}\psi(\xi)d\xi\ ;$

$\Omega:\quad x-at=0,\quad x+at=0,\quad x-at=1,\quad x+at=4$
түзулермен шектелген аймақ.

105.

$$u(x,t)=\left(\frac{x-3t}{6}\right)^3+\left(\frac{x+3t}{6}\right)^3+\frac{(x-3t)^2}{9},$$

$$\Omega\equiv\begin{cases}x-3t=0, & x+3t=0;\\ 3t-x=9, & x+3t=18.\end{cases}$$

106. $P(z)-P(\lambda(z))=f(z),\ \ \lambda(x)=\dfrac{(1-2k_2)(1+2k_1)}{(1+2k_2)(1-2k_1)}x,$

а)

$$u(x,t)=\varphi(x+2t)-\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\varphi(\alpha^m(x+2t))-\psi\left(\frac{\alpha^m}{1+2k}(x+2t)\right)\right\}+$$

$$+\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\varphi(\alpha^m(x-2t))-\psi\left(\frac{\alpha^m}{1+2k}(x-2t)\right)\right\},\quad \alpha=\frac{1-2k}{1+2k};$$

б) $u(x,t)=\dfrac{1}{2}(x-2t)+\dfrac{1}{2}(x+2t)=x;$

в) $u(x,t)=\varphi\left(\dfrac{x-2t}{2}\right)+\psi\left(\dfrac{x+2t}{2}\right)-\varphi(0).$

107.

$$u=4t+cos(x+2t)-\sum_{m=0}^{\infty}cos\left(\frac{1}{3}\right)^m(x+2t)+\sum_{m=0}^{\infty}cos\left(\frac{1}{3}\right)^m(x-2t).$$

108.

$$u(x,t)=\varphi(x+t)-\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\varphi\left[\left(\frac{1}{2}\right)^m(x+t)\right]-\psi\left[\frac{3}{2^{m+2}}(x+t)\right]\right\}+$$

$$+\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\varphi\left[\left(\frac{1}{2}\right)^m(x-t)\right]-\psi\left[\frac{3}{2^{m+2}}(xt)\right]\right\};$$

аймағы $\Omega: x+t=0, \quad x-t=0, \quad x-t=1, \quad x+t=4/3$.

109. Мына $u_{xx}-u_{tt}+\lambda u=0$ теңдеудің $\xi=x+t, \eta=x-t$ айнымалылар үшін Риман функциясы

$$R(\xi,\eta;x,y)=I_0(\mu\sqrt{(\xi-\xi_1)(\eta-\eta_1)})$$

болатынын тексеріңіз, мұндағы $\mu^2=-\lambda$, ал I_0 -Бессельдің нөлінші ретті функциясы.

110. $u(x,t)=\dfrac{\varphi(x+t)+\varphi(x-t)}{2}+$

$$+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}J_0(\mu\sqrt{(x+t-\xi_1)(x-t-\xi_1)}\varphi(\xi_1)d\xi_1-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}+\frac{\partial}{\partial\eta_1}\right)J_0(\mu\sqrt{(\xi-\xi_1)(\eta-\eta_1)}\Big|_{\eta_1=\xi_1}\varphi(\xi_1)d\xi_1$$

111. $u(x,t)=\dfrac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\dfrac{\lambda}{4}\right)^k\dfrac{(x^2-t^2)^{k+1}}{[(k+1)!]^2}$.

112. $u=\dfrac{1}{2}+(4-3y)e^{1-x-y}-(2x+\dfrac{3}{2})e^{2(1-x-y)}$,

$R(x,y,\xi,\eta)=e^{x-\xi+2(y-\eta)}$.

113. $u=xy-y$, $R(x,y,\xi,\eta)=\dfrac{\xi\, y}{x\eta}$.

114. $u=x-y+xy$, $R(x,y,\xi,\eta)=\dfrac{x+y}{\xi+\eta}$.

115. $u=(y-x)(x^2+1)+x^5\cos x$.

III тарау. ПАРАБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР.

§1. Коши есебі.

1^0. Жалпы жағдай

Параболалық типке жататын теңдеулердің қарапайымы

$$\sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} - u_t = 0, \qquad (3.1)$$

теңдеу. Әдетте бұл теңдеуді жылу откізгіштік теңдеуі деп атайды. Осы теңдеуді

$$u(x,t)\big|_{t=0} = \varphi(x) \qquad (3.2)$$

бастапқы шартпен шешу – ***Коши есебі*** деп аталады.

Бұл (3.1)-(3.2) Коши есебінің (n=1 үшін) шешімі:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) e^{\frac{-(x-y)^2}{4t}} dy, \; t > 0, \qquad (3.3)$$

мұндағы $\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \equiv G(x,t)$ жылу өткізгіштік теңдеуінің *іргелі (фундаменталь) шешімі* немесе *жылу көзі* деп аталады, ал (3.3) - *өрнекті Пуассон формуласы* деп атайды.

Біртекті емес Коши есебін (n=1, ал $n \geq 2$ үшін де осылайша)

$$u_t - u_{xx} = f(x,t), t > 0, x \in (-\infty, +\infty) \qquad (3.4)$$

$$u(x,t)\big|_{t=0} = \varphi(x), x \in (-\infty, \infty) \qquad (3.5)$$

қарастырайық.

Бұл есептің шешімін $u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$ түрінде іздейміз. Мұндағы $u_1(x,t)$ функция жоғарғадағы біртекті теңдеу үшін қойылған есептін шешуі, яғни $u_1(x,t)$ үшін (3.3) өрнек орынды, ал $u_2(x,t)$ функция

$$u_{2t} - u_{2xx} = g(x,t), \; u_2(x,t)\big|_{t=0} = 0, \; x \in (-\infty, +\infty), \; t > 0 \; (3.6)$$

есептің шешімі.

Соңғы (1.6) есепті шешу үшін

$$v_t - v_{xx} = 0, \quad v(x,t)\Big|_{t=\tau} = g(x,\tau), \quad x \in (-\infty,\infty), t > \tau \quad (3.7)$$

көмекші есеп құрамыз. Бұл көмекші есеп үшін де (3.3) формула орынды, бірақ $t > \tau$ екенін керек. Сонда (3.6) есептің шешімі (Дюамель қағидасы).

$$u_2(x,t) = \int_0^t v(x,t,\tau)d\tau \quad (3.8)$$

болады, демек

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\pi / t - \tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4(t-\tau)}} f(y,\tau)dy \quad (3.9)$$

Ал $n \geq 2$ үшін (3.4) - (3.5) Коши есебінің шешімі

$$u(x,t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int_{R^n} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \varphi(\xi)d\xi +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_{R^n} \frac{1}{\left[\sqrt{\pi(t-\tau)}\right]^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}} f(\xi,\tau)d\xi \quad (3.10)$$

мұндағы $|x-\xi|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \xi_i)^2$; бұл өрнекті Пуассон формуласы деп атайды. Мына:

$$u_t = a^2 \Delta u(x,t), \quad x \in R^n$$

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$$

Коши есебінің шешімі кейде

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a^{2k}t^{k}}{k!}\Delta^{k}u_0(x) \qquad (3.11)$$

жинақты қатармен анықталады.

Мына есептерді шешіңіз:

1. Егер $u(x,t)$ функция $u_t=u_{xx}(x\in(-\infty,+\infty),\, t>0)$ теңдеудің шешімі болса, онда $u(\lambda x,\lambda^2 t)$ кез - келген $\lambda=const$ үшін сол теңдеудің шешімі болатынын көрсетіңіз.
2. Егер $f(x)\equiv f_k(x)$ болғанда Кошидің (3.1) - (3.2) есебінің шешімі $u_k(x,t)$ болса, онда $f(x)=\sum_{k=1}^{m}f_k(x)$ болғанда сол есептің шешімі $u(x,t)=\sum_{k=1}^{m}u_k(x,t)$ болатынын көрсетіңіз (суперпозиция қағидасы).
3. Егер $f(x,t)\equiv f_k(x,t)$ функция болғанда (3.4) теңдеудің шешімі $u_k(x,t)$ болса, онда $f(x,t)=\sum_{k=1}^{m}f_k(x,t)$ үшін (3.4) теңдеудің шешімі $u(x,t)=\sum_{k=1}^{m}u_k(x,t)$ болатынын көрсетіңіз.
4. Егер $\varphi(x)\equiv\varphi_k(x)$ болғанда (3.1) - (3.2) есептің шешімі $u_k(x,t)$ болса, онда $u(x,t)=\prod_{k=1}^{m}u_k(x_k,t)$ функция (3.1) - (3.2) есптің бастапқы шарты $u(x,0)=\prod_{k=1}^{m}\varphi_k(x_k)$ болатындай шешімін көрсетіңіз.

5. Егер $F(x,t) \in C_x^2$ функция x аргументі бойынша гармоникалық функция болса, онда $u(x,t) = \int_0^t F(x,\tau)d\tau$ мына Коши есебінің

$$u_t = a^2 \Delta u(x,t) + F(x,t), \quad u(x,t)\big|_{t=0} = 0$$

шешімі болатынын көрсетіңіз.

6. Егер $f(x,t) = \cos nx \; f_n(t)$ болса, онда (3.4) теңдеудің дербес шешімін jґрыЎдар, бүл жердегі $f_n(t)$ - үзліссіз функция.

7. Егер $f(x.t) = chkx \cdot f_k(t)$, мүндағы $f_k(t)$ - үзліссіз функция болса, онда (3.4) теңдеуінің дербес шешімін jґрыңдар.

8. Пуассон формуласы

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi, t > 0$$

бойынша анықталған бүл функция біртекті (3.1) теңдеудің және алғашқы шарт (3.2) қанағаттандыратынын көрсетіңіз.

9. Егер (3.11) формуладағы қатар мүшесінен x айнымалы бойынша екі, ал t бойынша бір рет дифференциялданатын болса, $u(x,t)$ функциясы (3.11) теңдеуді қанағаттандыратынын көрсетіңіз.

10. Пуассон формуласын (3.10) немесе (3.11) пайдаланып мына төмендегі есептерді шешіңдер.

a) $u_t = u_{xx} + te^{-x}, \quad u\big|_{t=0} = \sin^2 x$.

b) $u_t = 4u_{xx} + tx^2, \quad u\big|_{t=0} = e^x \cos x$.

c) $u_t = 9u_{xx} + t + x^2, \quad u\big|_{t=0} = e^{-x} \sin x$.

d) $u_t = \frac{1}{4}u_{xx} + tx + 2, \quad u\big|_{t=0} = \cos^2 x$.

e) $u_t = 2u_{xx}, \quad u\big|_{t=0} = x^2 + \cos 2x$.

f) $u_t = 5u_{xx}, \quad u|_{t=0} = x + e^{2x}\sin 2x$.

g) $u_t = 4u_{xx} + 2u, \quad u|_{t=0} = e^{-x} + x^4$.

h) $u_t = u_{xx} + 2u_x + u, \quad u|_{t=0} = e^{-3x}$.

11. Есептерді шешіңдер (n=2)

a) $u_t = 4\Delta u, \quad u|_{t=0} = e^{-2x}(\sin 2y + 2y)$.

b) $u_t = 9\Delta u + 4u, \quad u|_{t=0} = \cos 2x + y^2$.

c) $u_t = \Delta u + e^{-x}, \quad u|_{t=0} = x^2y^2 + x^4$.

d) $u_t = \Delta u + t(x+y), \quad u|_{t=0} = x^3 + y^3 + x$.

e) $u_t = \Delta u, \quad u|_{t=0} = x^2y^3 + x^3y^2$.

f) $u_t = \Delta u + 3xyt, \quad u|_{t=0} = \sin x \cos y$.

12. Есептерді шешіңдер (n=3)

a) $u_t = a^2\Delta u + (x^2 + y^2)e^{-t}, \quad u|_{t=0} = xy\sin z$.

b) $u_t = \Delta u, \quad u|_{t=0} = 3x^2y^2z^2$.

c) $u_t = 9\Delta u + y^2te^{-x}\sin z, \quad u|_{t=0} = 0$.

d) $u_t = \Delta u + e^{y-z}\sin x, \quad u|_{t=0} = (x^2 + y^2)z + z^3$.

e) $u_t = a^2\Delta u + hu, \quad u|_{t=0} = e^{-z}\sin x \cos y$.

f) $u_t = a^2\Delta u + 2u, \quad u|_{t=0} = e^{x+y}\cos 2z$.

2^0. Жылу өткізгіштік теңдеуі үшін кейбір шекаралық есептерді жалғастыру әдісімен шешу

Жоғарғы көрсетілген (3.4) теңдеумен (3.5) шартпен анықталған функция $u(x,t)$ үшін мына тұжырымм орынды. (Функция көп аргументі болған жағдайда).

Лемма. Егер де $\varphi(x)$ мен $f(x,\tau)$ функциялар x_i аргументі бойынша тақ функция болса, онда

$$u\Big|_{x_i}=0.$$

ал, олар x_i аргументі бойынша жұп функция болса, онда

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{x_i=0}=0.$$

Осы лемманы пайдаланып, кейбір шекаралық есептердің шешімдерін жазуға болады.

Мысалы:

$$u_t=a^2(u_{xx}+u_{yy})+F(x,y,t),\quad x>0,y>0,\quad t>0$$

$$u\Big|_{t=0}=f(x,y),\quad x>0,\quad y>0,\quad u\Big|_{x=0}=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=0.$$

Бұл есептегі берілген f(x,y) мен F(x,y,t) функцияларды x аргументі бойынша тақ, ал y аргументі бойынша жұп жалғастырады, яғни

$$\bar{f}(x,y)=\begin{cases}f(x,y), & x>0\\ -f(-x,y), & x<0,\end{cases}$$

$$\bar{\bar{f}}(x,y)=\begin{cases}f(x,y), & y>0\\ \bar{f}(x,-y), & y<0\end{cases}$$

$$\bar{F}(x,y)=\begin{cases}F(x,y), & x>0\\ -F(-x,y), & x<0,\end{cases}$$

$$\bar{\bar{F}}(x,y)=\begin{cases}\bar{F}(x,y,t), & y>0\\ F(x,-y,t), & y<0.\end{cases}$$

Есептің шешуі (n=2) Пуассон формуласы бойынша

$$u(x,y,t)=\iint_{R^2}\overset{=}{f}(\xi,\eta)G(x-\xi,y-\eta,t)d\xi d\eta+$$

$$+\int_0^t d\tau\iint_{R^2}\overset{=}{F}(\xi,\eta,\tau)G(x-\xi,y-\eta,t-\tau)d\xi.d\eta.$$

$\overset{=}{f}(x,y)$ және $\overset{=}{F}(x,y)$ функцияларды $\bar{f}(x,y)$ және $\bar{F}(x,y,t)$ функцияларымен алмастырсақ:

$$u=\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\,\{\int_0^{\infty}\bar{f}(\xi,\eta)G(x-\xi,y-\eta)d\eta+$$

$$+\int_{-\infty}^{0}\bar{f}(\xi,-\eta)G(x-\xi,y-\eta)d\eta\}+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty}\{\int_0^{\infty}\bar{F}(\xi,\eta,\tau)G(x-\xi,y-\eta,t-\tau)d\eta+$$

$$+\int_{-\infty}^{0}\bar{F}(\xi,-\eta,\tau)G(x-\xi,y-\eta,t-\tau)d\eta\}d\xi=$$

$$=\int_0^{\infty}d\eta\int_{-\infty}^{\infty}\bar{f}(\xi,\eta)[G(x-\xi,y-\eta,t-\tau)+G(x-\xi,y+\eta,t-\tau)]d\xi+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^{\infty}d\eta\int_{-\infty}^{\infty}\bar{F}(\xi,\eta,\tau)G(x-\xi,y-\eta,t-\tau)d\xi+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^{\infty}d\eta\int_{-\infty}^{\infty}\bar{F}(\xi,\eta,\tau)G(x-\xi,y+\eta,t-\tau)d\xi$$

Енді $\bar{f}(x,y),\bar{F}(x,y)$ функцияларды бастапқы берілген $f(x,y),F(x,y,t)$ алмастырып мына шешімді анықтаймыз:

$$u(x,y,t)=\int_0^\infty\int_0^\infty f(\xi,\eta)[G(x-\xi,y-\eta,t)-G(x+\xi,y-\eta,t)+$$

$$+G(x-\xi,y+\eta,t)-G(x+\xi,y+\eta,t)]d\xi d\eta+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^\infty\int_0^\infty F(\xi,\eta,\tau)[G(x-\xi,y-\eta,t-\tau)-G(x+\xi,y-\eta,t-\tau)+$$

$$+G(x-\xi,y+\eta,t-\tau)-G(x+\xi,y+\eta,t-\tau)]\,d\xi\,d\eta.$$

Функция

$$Q(x\pm\xi,y\pm\eta,t)=G(x-\xi,y-\eta,t)-G(x+\xi,y-\eta,t)+$$
$$+G(x-\xi,y+\eta,t)-G(x+\xi,y+\eta,t)$$

аралас есеп үшін Грин функциясы, ол мына шартты

қанағаттандырады: $$\frac{\partial Q}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}\right),\quad t>0,$$

$$Q\big|_{x=0}=0,\quad \left.\frac{\partial Q}{\partial y}\right|_{y=0}=0.$$

Жалғастыру әдісін пайдаланып төменгі есептерді шешіңдер.

13. $u_t=a^2U_{xx},\quad 0<x<\infty,\quad t>0,$

$u_x(0,t)=0,\quad u(x,0)=\varphi(x);.$

14. $u_t=a^2u_{xx}-hu,\quad 0<x<\infty,\quad t>0,$

$u_x(0,t)=0,\quad u(x,0)=\varphi(x);.$

15. $u_t=a^2(u_{xx}+u_{yy}),\quad -\infty<x<\infty, t,y>0,$

$u(x,0,t)=0,\quad u(x,y,0)=\varphi(x,y);$

16. $u_t=u_{xx}+3t^2,\quad u(x,0)=\sin x;\quad .$

17. $u_t=(u_{xx}+u_{yy})+\sin z\sin x\sin y,\ u(x,y,t)\big|_{t=0}=1;.$

18. $u_t=3(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})+e^t,\ u(x,y,z,t)\big|_{t=0}=\sin(x-y-z);.$

19. $u_t=a^2u_{xx},\quad 0<x,t<\infty,\quad u(0,t)=0,\quad u(x,0)=\sin x;$

20. $u_t = a^2 u_{xx},\ 0 < x,t < \infty,\ u_x(0,t) = 0,\ u(x,0) = \cos 2x;$

21. $u_t = a^2 u_{xx} - hu,\ 0 < x,t < \infty,\ u(0,t) = 0,\ u(x,0) = x + x^3;$

22. $u_t = a^2 u_{xx} + (1 + x^2)t,\ 0 < x,t < \infty,\ u_x(0,t) = 0,\ u(x,0) = 0;$

23. $u_t = a^2 u_{xx} + x^3 t, \quad 0 < x,t < \infty, \quad u(0,t) = 0, \quad u(x,0) = 0;$

Жалғастыру әдісін пайдаланып мына есептердің Грин функцияларын құрындар

a) Жарты өс аймақта:

24. $u_t = a^2 u_{xx}, \quad x,t > 0, \quad u\big|_{t=0} = f(x), \quad u\big|_{x=0} = 0;$

25. $u_t = a^2 u_{xx}, \quad x,t > 0, \quad u\big|_{t=0} = f(x), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0;.$

26. $u_t = a^2 u_{xx},\ x,t > 0,\ u\big|_{t=0} = f(x), \left.\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} - hu\right)\right|_{x=0} = 0,\ h = const;.$

b) Жарты жазықтық аймақта: $-\infty < y < \infty, \quad x > 0$

27. $u_t = a^2 (u_{xx} + u_{yy}), \quad u\big|_{t=0} = f(x,y), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0;$

28. $u_t = a^2 (u_{xx} + u_{yy}), u\big|_{t=0} = f(x,y), \left.\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} - hu\right)\right|_{x=0} = 0;$

c) Ширек аймақта: $(x > 0, \quad y > 0)$

29. $u_t = a^2 (u_{xx} + u_{yy}), u\big|_{t=0} = f(x,y), x > 0, y > 0,$
$u(0,y,t) = u(x,0,t) = 0;$

30. $u_t = a^2 (u_{xx} + u_{yy}), u\big|_{t=0} = f(x,y), x > 0, y > 0,$
$u_x(0,y,t) = u(x,0,t) = 0.$

§2. *Жылу потенциялдар әдісі*

Жылу өткізгіштік туңдеудің іргелі шешімі $G(x,t)$ пайдаланып мынадай көлемдік

$$U_0(x,t) = \int_\Omega f(\xi) G(x-\xi,t) d\xi \ ,$$

$$U\ (x,t) = \int_0^t d\tau \int_\Omega F(\xi,\tau) G(x-\xi,t-\tau) d\xi$$

және беттік потенциалдар

$$V(x,t) = \int_0^t d\tau \int_\Omega \sigma(\xi,\tau) G(x-\xi,t-\tau) dS_\xi ,$$

$$W(x,t) = \int_0^t d\tau \int_\Omega \mu(\xi,\tau) \frac{\partial}{\partial N} G(x-\xi,t-\tau) dS_\xi$$

туруға болдады. Дәлірек айтқанда $V(x,t)$ жай қабаттық, ал $W(x,t)$ қосқабаттық беттік потециаолдар деп аталады.

Келтірілген жылу потенцциалдары үшін мына тұжырымдар орынды. (Ω - шектелген аймақ., S - оның беті).

Лемма 1. Егер функция $f(x) \in C(\Omega)$, онда $t \geq \delta > 0$, $U_0(x,t) \in C^\infty_{x,t}(Q_T)$

$$\frac{\partial U_0}{\partial t} = a^2 \Delta U_0 \tag{3.12}$$

$$\lim_{t \to 0} U_0(x,t) = \begin{cases} f(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \overline{\in} \Omega, \end{cases} \tag{3.13}$$

мұндағы $Q_T = \Omega \times [0,T]$.

Лемма 2. Егер функция $F(x,t) \in C^{\alpha,o}_{x,t}(Q_T)$ шектелген болса, онда $t \geq \delta > 0$,

$$U\ (x,t) \in C^{\alpha,1}_{x,t}(Q_T) ,$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \Delta U + F(x,t), \tag{3.14}$$

$$\lim_{t\to 0} U\ (x,t) = 0. \tag{3.15}$$

Лемма 3. Егер функция $\sigma(x,t) \in C(S_T)$ шектелген болса, онда,

$$V\ (x,t) \in C_{x,t}^{\alpha,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = a^2 \Delta V\ , \tag{3.16}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\partial V\ (x,t)}{\partial N} = \pm \frac{1}{2a^2} \sigma(x^0,t) + \left(\frac{\partial V(x,t)}{\partial N_x}\right)_{x=x^0}. \tag{3.17}$$

Лемма 4. Егер функция $\mu(x,t) \in C(S_T)$ шектелген болса, онда,

$$W(x,t) \in C_{x,t}^{\alpha,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T),$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = a^2 \Delta W\ , \tag{3.18}$$

$$\lim_{t\to 0} W(x,t) = \pm \frac{1}{2a^2} \mu(x^0,t) + W(x^0,t). \tag{3.19}$$

Жылу потенциалдарының келтірілген қасиеттерін пайдаланып көптеген шекаралық есептердің шешімдерін интегралдар арқылы өрнектеуге немесе шешілітін интегралдық теңдеулерге келтіруге болады.

1-мысал. Бір өлшемді жылуөткіштік теңдеу үшін Дирихле есебі үшін

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad x > 0,\ t > 0$$

$$u(x,t)\ \Big|_{t=0} = 0,$$

$$u(x,t)\ \Big|_{x=0} = \varphi(t)$$

қарастырайық.

Шешуі. Шекарасы $x = 0$ нүкте болғандықтан. Шешуін қосқабат потенциал

$$u(x,t)=\int_0^t \mu(\tau)\frac{\partial G(x-\xi,t-\tau)}{\partial\xi}\bigg|_{\xi=0} d\tau=\int_0^t \mu(\tau)\frac{x\, e^{-\frac{x^2}{4a^{2}(t-\tau)}}}{4a^3\sqrt{\pi(t-\tau)^3}}d\tau$$

түрінде іздейміз, мұндағы $\mu(t)$ белгісіз функция. $W(x,t)$ біртекті жылуөткіздік теңдеуді қанағаттандырады және $W(x,0)=0$. Белгісіз фукцияны шекаралық шартты пайдаланып

$$\lim_{t\to 0}W(x,t)=\pm\frac{1}{2a^2}\mu(x^0,t)=\varphi(t)$$

анықтаймыз. Сондықтан $\mu(x^0,t)=2a^2\varphi(t)$. Сонымен шекаралық есептің шешімі

$$u(x,t)=\int_0^t \varphi(\tau)\frac{x\, e^{-\frac{x^2}{4a^{2}(t-\tau)}}}{4a^3\sqrt{\pi(t-\tau)^3}}d\tau .$$

2-мысал. Бірөлшемді жылуөткіштік теңдеу үшін Робэн есебі үшін

$$u_t=a^2u_{xx}, \quad x>0,\ t>0$$

$$u(x,t)\,\big|_{t=0}=0,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}-hu\right)_{x=0}=\chi(t)$$

қарастырайық.

Шешуі. Шекарасы *x =0* нүкте болғандықтан. Шешуін жайқабат потенциал

$$u(x,t)=\int_0^t \sigma(\tau)G(x-\xi,t-\tau)\Big\|_{\xi=0}d\tau ,$$

Мұндағы $\sigma(t)$ белгісіз функция. Белгісіз фукцияны шекаралық шартты пайдаланып

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-hu\right)=\pm\frac{1}{2a^2}\sigma(t)-h\int_0^t\sigma(\tau)\frac{d\tau}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}=\chi(t) \quad (3.20)$$

Немесе

$$\sigma(t) = ah\int_0^t \sigma(\tau)\frac{d\tau}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} + 2a^2\chi(t)$$

$\sigma(t)$ - белгісіз функция үшін Вольтерраның екінші текті интегралдық теңдеуін алдық.Шешімінің жуықтау әдісімен табуға болды.

Жылу потенциалдарды пайдаланып мына есептерді шешімдер:

31. $u_t = a^2u_{xx}$, $x>0,\ t>0$, $u(x,0)=0$, $u_x\big|_{x=0} = \psi(t)$.

32. $u_t = a^2u_{xx}$, $x>0,\ t>0$, $u(x,0)=f(x)$, $u\big|_{x=0} = \varphi(t)$

33. $u_t = a^2u_{xx} + F(x,t)$, $x>0,\ t>0$, $u(x,0)=0$,

$u_x\big|_{x=0} = \varphi(t)$.

34. $u_t = a^2(u_{xx}+u_{yy})$, $x>0,\ t>0,\ -\infty<y<\infty$,

$u(x,y)\big|_{t=0} = 0$, $u\big|_{x=0} = \varphi(y,t)$.

35. $u_t = a^2(u_{xx}+u_{yy})$, $x>0,\ t>0,\ -\infty<y<\infty$

$u(x,y)\big|_{t=0} = f(x,y)$, $u_x\big|_{x=0} = \varphi(y,t)$

36. $u_t = a^2(u_{xx}+u_{yy}) + F(x,y,t),\ x>0,\ t>0,\ -\infty<y<\infty$

$u(x,y)\big|_{t=0} = 0$, $u_x\big|_{x=0} = \varphi(y,t)$.

37. $u_t = a^2u_{xx}$, $x>0,\ t>0$, $u(x,0)=0$,

$\left(\frac{\partial u}{\partial x} - hu\right)_{x=0} = \chi(t)$.

38. $u_t = a^2u_{xx} - hu$, $x>0,\ t>0$, $u(x,0)=0$, $u\big|_{x=0} = \varphi(t)$.

39. $u_t = a^2u_{xx} + u_x + \frac{1}{4}u$, $x>0,\ t>0$, $u(x,0)=0$,

$u_x\big|_{x=0} = \psi(t)$.

Жауаптары

1. –5. есептер айқын.

6. Шешімін $u(x,t)=T(t)\cos nx$ түрінде іздеу керек $\Rightarrow$

$$\begin{cases} T_n(t)=e^{-n^2 t}[c+\int_0^t \varphi_n(\tau)e^{n^2\tau}d\tau, c=const, \\ u_n(x,t)=T_n(t)\cos nx. \end{cases}$$

7. $$\begin{cases} u_k(x,t)=T_k(t)chkx, \\ T_k(t)=Ce^{k^2 t}+\int_0^t f_k(\tau)e^{k^2(t-\tau)}d\tau, c=const. \end{cases}$$

8. Алмастыру $\xi-x=2a\sqrt{t}z$ енгізіп

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi \Rightarrow u(x,0)=\lim_{t\to 0}u(x,t)=f(x)$$

.

9. Айқын

10.

a) $e^{-x}[e^t-t-1]+\frac{1}{2}(1-\cos 2x\cos 4t)$.

b) $\frac{1}{2}x^2t^2+\frac{x}{3}t^3+e^x\cos(x+8t)$.

c) $x^2t+\frac{19}{2}t^2+e^{-x}\sin(x-18t)$.

d) $2t+\frac{t^2}{2}x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-t}\cos 2x$.

e) $x^2+4t+e^{-8t}\cos 2x$.

f) $x+e^{2x}\sin 2(x+40t)$.

g) 7. $e^{2t}(x^4+48tx^2+192t^2)+e^{6t-x}$.

h) 8. e^{4t-3x}.

11.

a) $e^{-2x}\sin 2y+2ye^{16t-2x}$.

b) $y^2+18t+e^{-3t}\cos 2x$.

c) $e^{t-x}-e^{-x}+x^4+x^2y^2+2t(tx^2+y^2)+16t^2$.

d) $\frac{1}{2}t^2(x+y)+x^3+y^3+x+6t(x+y)=$

$=x^3+y^3+x(\frac{1}{2}t^2+6t)(x+y)$.

e) $(x+y)[x^2y^2+t(x^2+y^2+5xy)+6t^2]$.

f) $\frac{3}{2}xyt^2+e^{-2t}\,sin\,x\,cos\,y$.

12.

a) $xy\sin ze^{-a^2t}+(x^2+y^2)(1-e^{-t})+4a^2(e^{-t}+t-1)$.

b) $3x^2y^2z^2+6t(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2)+6(x^2+y^2+z^2)t^2 12t^3$.

c) $\frac{1}{2}y^2t^2e^{-x}\sin z+3t^3e^{-x}\sin z$.

d) $te^{y-x}\sin x+(x^2+y^2+z^2)z+10zt$.

e) $e^{(h-a^2)t-z}\sin x\cos y$.

f) $e^{x+u-2(1+a^2)t}\cos 2z$.

13. $u(x,t)=\dfrac{e^{-ht}}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^\infty[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(x+\xi)}{4a^2t}}]\varphi(\xi)d\xi$.

14. $u(x,t)=\dfrac{e^{-ht}}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^\infty[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(x+\xi)}{4a^2t}}]\varphi(\xi)d\xi$.

15. $u(x,y,t)=$

$$=\frac{e^{-ht}}{(2a\sqrt{\pi t})^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\int\limits_0^{\infty}[e^{-\frac{(y-\xi)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(y+\xi)}{4a^2t}}]f(\xi,\eta)d\xi d\eta\cdot$$

16. $u(x,y)=t^3+e^{-t}\sin x$.

17. $u(x,y,t)=1+\frac{1}{5}\sin x\sin y(2\sin t-\cos t+e^{-2t})$.

18. $u(x,y,t)=e^t-1+\sin(x-y-z)e^{-9t}$.

19. $\sin xe^{-a^2}t$

20. $e^{-4a^2t}\cos 2x$.

21. $(x+x^3+6xt)e^{-ht}$.

22. $(1+x^2)\frac{t^2}{2}+a^2\frac{t^3}{2}$;

23. $\frac{1}{2}x^3t^2+a^2xt^3$.

24. $u(x,t)=\int\limits_0^{\infty}f(\xi)Q(x\pm\xi,t)d\xi,$

$$Q(x\pm\xi,t)==G(x-\xi,t)-G(x+\xi,t)$$

25. $u(x,t)=\int\limits_0^{\infty}f(\xi)Q(x\pm\xi,t)d\xi,$

$$Q(x\pm\xi,t)=G(x-\xi,t)+G(x+\xi,t)$$

26. $u(x,t)=\int\limits_0^{\infty}f(\xi)Q(x\pm\xi,t)d\xi,$

$$Q(x\pm\xi,t)=G(x-\xi,t)+G(x+\xi,t)-2n\int\limits_0^{\infty}G(x+\xi+\zeta,t)e^{-h\zeta}d\varsigma$$

27. $u(x,y,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\eta\int\limits_0^{\infty}f(\xi,\eta)Q(x\pm\xi,y-\eta,t)d\xi,$

$$Q(x\pm\xi,y-\eta,t)=G(x-\xi,y-\eta,t)-G(x+\xi,y-\eta,t).$$

28. $$u(x,y,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\eta\int\limits_{0}^{\infty}f(\xi,\eta)Q(x\pm\xi,y-\eta,t)d\xi,$$

$$Q(x\pm\xi,y-\eta,t)=G(y-\eta,t)*$$

$$*\left[G(x-\xi,t)+G(x+\xi,t)-2h\int\limits_{0}^{\infty}G(x+\xi+\zeta)e^{-h\zeta}d\zeta\right].$$

29. $$u(x,y,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\eta\int\limits_{0}^{\infty}f(\xi,\eta)Q(x\pm\xi,y\pm\eta,t)d\xi,$$

$$Q(x\pm\xi,y\pm\eta,t)=G(x-\xi,y-\eta,t)-G(x+\xi,y-\eta,t)-$$
$$-G(x-\xi,y-\eta,t)+G(x+\xi,y+\eta,t).$$

30. $$u(x,y,t)=\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}f(\xi,\eta)Q(x\pm\xi,y\pm\eta,t)d\xi,$$

$$Q(x\pm\xi,y\pm\eta,t)=G(x-\xi,y-\eta,t)+G(x+\xi,y-\eta,t)-$$
$$-G(x-\xi,y+\eta,t)-G(x+\xi.y+\eta,t).$$

31. $$u(x,t)=-a\int\limits_{0}^{t}\frac{\psi(\tau)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau.$$

32. $$u(x,t)=\int\limits_{0}^{\infty}f(\xi)[G(x-\xi,t)-G(x+\xi,t)]d\xi+$$

$$+2a^2\int\limits_{0}^{t}\varphi(\tau)\frac{\partial}{\partial\xi}G(x-\xi,t)\Big|_{\xi=0}d\tau$$

33. $$u(x,t)=\int\limits_{0}^{t}d\tau\int\limits_{0}^{\infty}F(\xi,t)G(x-\xi,t-\tau)d\xi-$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^\infty F(\xi,t)G(x+\xi,t-\tau)d\xi-2a^2\int_0^t\varphi(\tau)G(x,t-\tau)d\tau.$$

34.

$$u(x,y,t)=2a^2\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^\infty \varphi(\eta,\tau)\frac{\partial}{\partial\xi}G(x-\xi,y-\eta,t-\tau)\Big|_{\xi=0}d\eta.$$

35. $$u(x,y,t)=\int_{-\infty}^\infty d\eta\int_0^\infty f(\xi,\eta)G(x-\xi,y-\eta,t)d\eta+$$

$$+\int_{-\infty}^\infty d\eta\int_0^\infty f(\xi,\eta)G(x+\xi,y-\eta,t)d\eta-$$

$$-2a^2\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^\infty\varphi(y,\tau)\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,y-\eta,t-\tau)\ d\eta$$

36. $$u(x,y,t)=\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^\infty d\eta\int_0^\infty F(\xi,\eta,\tau)G(x-\xi,y-\eta,t-\tau)d\eta-$$

$$-\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^\infty d\eta\int_0^\infty F(\xi,\eta,\tau)G(x+\xi,y-\eta,t-\tau)d\eta+$$

$$+2a^2\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^\infty\varphi(\eta,\tau)\frac{\partial}{\partial\xi}G(,x-\xi,y-\eta,t-\tau)\Big|_{\xi=0}d\eta$$

37.

$$u(x,t)=-a^2\int_0^t\chi(\tau)[2G(x,t-\tau)-2h\int_0^\infty G(x+\xi,t-\tau)e^{-h\xi}d\xi]d\tau.$$

38. $$u(x,t)=2a^2e^{-h\tau}\int_0^t\varphi(\tau)e^{ht}\frac{\partial}{\partial\xi}G(x-\xi,\tau)\Big|_{\xi=0}d\tau$$

39. $$u(x,t)=-2e^{-\frac{x}{2}}\int_0^t\psi(\tau)G(x,t-\tau)d\tau.$$

IV тарау. ЭЛЛИПТИКАЛЫК ТЕҢДЕУЛЕР

§ 1. Лаплас теңдеуіне қойылған қарапайым есептер

Эллиптикалық теңдеулердің негізгі мысалдары ретінде $\Delta u(x)=0$ - Лаплас, $\Delta u=-f(x)$- Пуассон теңдеулерін келтіруге болады, бұлардағы

$$\Delta=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad \text{- Лаплас операторы.}$$

1–анықтама. Ω аймақта берілген дифференциалдық теңдеуді туындыларымен бірге үзіліссіз және оны тепе - теңдікке айналдыратын функцияны сол теңдеудің регулярлық шешімі деп айтады.

2–анықтама. Лаплас теңдеуінің регулярлық шешімін гармониялық функция деп айтамыз.

Егер аналитиқалық функцияны $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ түрінде жазсақ, онда $u(x,y)$ және $v(x,y)$ функциялары гармониялық функциялар болады, мұндағы $z=x+iy$. Міне бұл тұжырым арқылы екі нақты аргументті гармониялық функциялармен бір комплекс аргументті аналитикалық функциялар арасындағы терең байланысты байқаймыз.

1. Лаплас және Пуассон теңдеулеріне қойылатын қарапайым есептер.

Гамониялық функцияларға мынадай шекаралық есептер қойылады

Дирихле есебі: $u(x)\in C^1(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ класта жататын, Ω аймақта гармониялық және

$$u(x)/_S=\varphi(x),\quad x\in S \tag{4.1}$$

Шекаралық шартты қанағаттандыратын $u(x)$ функцияны анықтау, мұндағы $\Psi(x)$ аймақ S шекарасында берілген үзіліссіз функция.

Нейман есебі: $u(x)\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ класта жататын, Ω аймақта гармониялық

$$\left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_S = \Psi(x),\ x \in S \qquad (4.2)$$

шекаралық шартты қанағаттандыратын $u(x)$ функцияны анықтау, мұндағы N Ω аймақ шекарасы S сыртқы нормалы, ал $\Psi(x)$ сол шекарада берілген үзіліссіз функция.

Нейман есебі шешілуі үшін

$$\int_S \frac{\partial u}{\partial N}\, dS = 0 \qquad (4.3)$$

қажетті шарт орындалуы керек.

Әдетте, Нейман есебі үшін (4.3) шарт орындалса, онда ол есеп дұрыс қойылған деп айтады.

Жоғарыдағы мағлұматтар мен тұжырымдарға мысалдар келтірейік.

1-мысал. Лаплас теңдеуін $x = r\cos\psi, y = r\sin\psi$ -поляр координата жүйесінде өрнектейік. Ол үшін бұл жүйеден $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\psi = arctg\frac{y}{x}$, олай болса

$$r_x = \left.\frac{x}{r}\right|_{x=r\cos\psi,} \qquad r_y = \sin\psi, \quad \psi_x = -\frac{\sin\psi}{r}, \quad \psi_y = \frac{\cos\psi}{r}$$

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \psi}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial x} = \cos\psi\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin\psi}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial \Psi},$$

$$u_y = \sin\psi\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\psi}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial \Psi}$$

және туындыларды анықтап, оларды Лаплас теңдеуіне $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\cdot u(x,y) = 0$ қойып нәтижеде

$$\Delta u(r,\psi) = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} = 0.$$

2-мысал. Коши-Риман шарттар жүйесін:

$$u_x(x,y) = v_y(x,y),\ u_y(x,y) = -v_x(x,y)$$

пайдаланып, $u(x,y)=x^2-y^2-x$ берілген кезде, оған түйіндес гармониялық $V(x,y)$ функцияны анықтайық.

Шешуі: $\frac{\partial u}{\partial x}=2x-1 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y}=2x-1$. Мұны интегралдап

$v(x,y)=2xy-y+\psi(x)$, мұнда $\psi(x)$ – кез-келген еркін функция; $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ шартты пайдалансақ $\frac{\partial v}{\partial x}=2y+\psi'(x)$ болғандықтан $\frac{\partial u}{\partial y}=-2y-\psi'(x)$ болса, есептің шарты бойынша $\frac{\partial u}{\partial y}=-2y$, демек

$$-2y-\psi'(x)=-2y \Rightarrow \psi'(x)=0 \Rightarrow \psi(x)=const$$

олай болса, $v(x,y)=2xy-y+C$. Сондықтан

$$f(z)=x^2-y^2-x+i(2xy-y+C).$$

3-мысал. $x^2+y^2=r^2<R^2$ шеңберде

$$\Delta u(x,y)=0,\quad 0\le r<R,\quad u(x,y)/_{r=R}=2x^2-y^2-x$$

Дирихле есебін шешейік.

Шешуі:

$$2x^2-y^2-x\Big|_{\substack{x=r\cos\psi\\ y=r\sin\psi}}=2r^2\cos^2\psi-r^2\sin^2\psi-r\cos\psi y=$$

$$=r\sin\psi\big|_{r=R}=R^2\left(\cos^2\psi+\cos 2\psi\right)-R\cos\psi=$$

$$=R^2\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cos 2\psi\right)-R\cos\psi,$$

$|z|=r$, шеңберде $u(x,y)$ гармониялық функция

$$u(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty} r^k\left(a_k\cos k\psi+b_k\sin k\psi\right) \qquad (4.4)$$

қатарды қанағаттандырады, мұндағы

$|z|=r$, $\psi=$ argz, $z=x+iy$, $a_к, b_k$ -тұрақты, нақты шамалар.

Қатар (4.4) есепке пайдаланып

$$\mathrm{u(x,y)} = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \left(a_k \cos k\psi + b_k \sin k\psi\right)/_{r=R} \Leftrightarrow$$

$$a + a_1 R\cos\psi + b_1 R\sin\psi + a_2 R^2 \cos 2\psi + b_2 \sin 2\psi + \ldots =$$

$$= \frac{R^2}{2} - R\cos\psi + \frac{3R^2}{2}\cos 2\psi/\Psi \Rightarrow$$

$$a_0 = \frac{R^2}{2},\; a_1 = -1,\; b_1 = 0,\; a_2 = \frac{3}{2},\; b_k = 0,\; k \geq 2,\; a_k = 0,\; k \geq 3;$$

олай болса $u(r,\psi) = \dfrac{R^2}{2} - r\cos\psi + \dfrac{3}{2}\left(r^2\cos^2\psi - r^2\sin^2\psi\right),$

бұдан декарт кординатасына өтсек

$$u(x,y) = \frac{R^2}{2} - x + \frac{3}{2}\left(x^2 - y^2\right).$$

4-мысал. $x^2 + y^2 = r^2 \leq R^2$ шеңбер сыртында

$$\Delta u(x,y) = 0,\; R < r < \infty,\; u(x,y)/_{r=k} = 2x^2 - x + y,\; |u(x,y)| < \infty.$$

Дирихленің сыртқы есебін шешейік .

Шешуі:бұл есепті шешу үшін жоғардағы (4.4) қатардың сыртқы аймақ үшін

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} r^{-k}\left(a_k \cos k\psi + b_k \sin k\psi\right) \qquad (4.5)$$

өрнегін пайдаланамыз, нәтижеде

$$u(r,\psi) = \sum_{k=0}^{\infty} r - k\left(a_k \cos x\psi + b_k \sin x\psi\right)\Big|_{r=R} \Leftrightarrow$$

$$a_0 + \frac{a_1}{R}\cos\psi + \frac{b_1}{R}\sin\psi + \frac{a_2}{R_2}\cos 2\psi + \ldots =$$

$$= R^2 - R\cos\Psi + R\sin\Psi + R^2\cos 2\Psi \quad \Rightarrow$$

$$a_0 = R^2, a_1 = -R^2, b_1 = R^2, a_2 = R^4, b_k = 0,\ k \geq 2, a_k = 0, k \geq 3;$$

$$u(r,\psi) = R^2 - \frac{R^2}{r}\cos\psi + \frac{R^2}{r}\sin\psi + \frac{R^4}{r^2}\cos 2\psi =$$

$$= R^2 - \left(\frac{R}{r}\right)^2 r\cos\psi + \left(\frac{R}{r}\right)^2 r\sin\psi +$$

$$+\left(\frac{R}{r}\right)^4 (r2\cos 2\Psi - r2\sin 2\Psi),$$

демек, есептің шешімі декарт координата жүйесінде

$$u(x,y) = R^2 - \left(\frac{R}{r}\right)^2 (x-y) + \left(\frac{R}{r}\right)^4 (x^2 - y^2).$$

Ескерту. Егер жоғарыдағы Дирихле есебі Пуассон теңдеуі үшін қойылған болса, оны жаңа белгісіз функциямен еркін таңдап алатын функция қосындысымен(айырмасымен) алмастырып,талдаған Дирихле есебіне келтіріп шешеді.

Келтірілген мағлұматтар мен шығарып көрсетілген есептерді пайдаланып төмендегі есептерді шешіңіз.

1. Лаплас теңдеуін сфералық координата жүйесінде $x = r\sin 0 \cos\Psi, z = r\cos 0$ жазыңыз.

2. $u(x,y) = u(x_1, x_2, ..., x_n) -$ гармониялық функция болса, төмендегі функциялар:

$$а)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, n \geq 2;\quad б)\sum_{k=1}^{4} x_k \frac{\partial u}{\partial x_k};\quad в)\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2$$

гармониялық болама?

3. Бірбайланысты Ω аймакта $f(z)$ аналитикалық функцияның нақты $u(x,y) = Re\, f(z)$ бөлігі берілсе, оның жорамал $v(x,y) = Jm\, Re\, f(z)$ бөлігін анықтап $f(z)$ функцияны анықтаңыз:

а) $u(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$;

б) $u(x,y)=x^2-y^2+2x$;

в) $u(x,y)=shx\cos y$;

г) $u(x,y)=shx\sin y$;

д) $u=2\sin chy-x$.

4. $x^2+y^2=r^2<R^2$ шеңбер ішінде $\Delta u(x,y)=0, \quad 0\le r<R$, $u(x,y)/_{r=R}=f(x,y)/_{r=R}$ Дирихле есебін шешіңіз, егер

а) $f(x,y)=4y^2$;

б) $f(x,y)=\dfrac{1}{R}y^2+Rxy$;

г) $f(x,y)=x^2-2y^2$ болса.

Сол шеңбер сыртында шектелген шешімін, егер

д) $f(x,y)=x^2-xy^2$;

ж) $f(x,y)=y^2-xy$;

к) $f(x,y)=x^2+y^2+x$ анықтаныз.

5. $x^2+y^2=r^2<R$ -шеңбер ішінде Пуассон теңдеуі үшін

$$\Delta u(x,y)=g(x,y), \quad 0\le r<R,$$
$$u(x,y)\big|_{r=R}=f(x,y)\big|_{r=R}$$

Дирихле есебін шешіңіз, егер

а) $g(x,y)=3, \ f(x,y)=0$;

б) $g(x,y)=x, \ f=1$;

в) $g(x,y)=1, \ f(x,y)=1$ болса.

Сол шеңбер сыртында шектелген шешімді табу керек, егер

$д)\ g(x,y)=x, f(x,y)=0;\quad ж)\ g(x,y)=y, f(x,y)=0.$

6. $x^2+y^2=r^2<R$ шеңберде Лаплас теңдеуі үшін қойылған Нейман есебінің шешілетін шарттарын анықтап, есепті шеңбер ішінде шешіңіз, егер

$$\Delta u(x,y)=0,\ 0\le r<r,\ \left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial r}\right|_{r=R}=f(x,y)|_{r=R}$$

есептегі

$а)\ f(x,y)=B;\ b)\ f(x,y)=4x^2-Ay^2+y;\ г)\ f(x,y)=Ay^2-B,$

шеңбер сыртында $(R<r<\infty)$ шектелген шешімін анықтау керек, егер $(r=R, |u(x,y)|<\infty)$:

$д)\ x^2+4y-A=f(x,y);\quad ж)\ f(x,y)=x^2-Ay^2+B.$

7. Шеңбер K: $0\le k<R, 0\le\psi\le2\pi$ аймақта гармоникалық $u(r,\psi)\in G^1\left(\bar{K}\right)$ функцияны анықтаңыз, егер ол шеңбер шекарасында $u(R,\psi)-u(R_1,\psi)=f(\psi)$, $\int\limits_0^{2\pi} f(\psi)d\psi=0$ шарттарды қанағаттандырғанда $f(\psi)$ функция:

$а)\ f(\Psi)=cos\Psi;\quad б)\ f(\Psi)=sin2\Psi+cos3\Psi;$

$в)\ f(\Psi)=A cos^2\Psi+B sin^2\Psi$

шамаларға тең болса.

Егер бұл есеп шеңбер сыртында, яғни $R<R_1<\infty$ және $\int\limits_0^{2\psi} f(\Psi)d\Psi=0$ шарттарды қанағаттандырып, $f(\Psi)$ функция;

$д)\ f(\Psi)=\sin\Psi+\cos5\Psi;\quad ж)\ f(\Psi)=\sin\Psi+3\cos^2\Psi-B$ болса.

R^n Евклид кеңістігінде $u(x)=u(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ гармониялық функция

$$u(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x_n^{2k}}{(2k)!}\Delta^k\tau(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x_n^{2k+1}}{(2k+1)!}\Delta^k\nu(x_1,x_2,\ldots x_{n-1})\qquad(4.6)$$

өрнекті қанағаттындырады, мұндағы $\tau(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})$, $\nu(x_1,\ldots,x_{n-1})$-шексіз дифференциалданатын кез-келген функциялар, ал $\Delta=\sum_{K=1}^{\infty}\frac{\partial^2}{\partial X_K^2}$ - Лаплас операторы.

Бұл формуланы Лаплас теңдеуі үшін қойылған Коши есебіне қолдануға болады.

Мысалы,

$\Delta u(x,y,z)=0,(x,y,z)\in R^3,\ u(x,y,0)\equiv\tau(x,y)\equiv x+2y,$

$u_z(x,y,0)\equiv\nu(x,y)=2x-y^2$

Коши есебіне (4.6) формуланы қолдансақ

$$u(x,y,z)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left[\frac{z^{2k}}{(2k)!}\Delta^k(x+2y)+\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\Delta^k(2x-y^2)\right]=$$

$$=x+2y+z(2x-y^2)+\frac{z^3}{3}.$$

8. (4.6) формуланы пайдаланып, төмендегі Лаплас теңдеуі үшін қойылған Коши есептерін шешіңіз:

$a)\tau(x,y) = xe^{y}, v(x,y) = 0;$

$б)\tau(x,y) = xy + x^{2}, v(x,y) = e^{x} + y;$

$в)\tau(x,y) = x\, sin, v(x,y) = cos\, y;$

$д)\tau(x,y) = cos\, 2x, v(x,y) = x - 2\, sin\, 2y;$

$г)\tau(x,y) = x^{3} + 2, v(x,y) = 2x^{2} - y.$

9. Лаплас теңдеуінің поляр координата жүйесіндегі өрнегін тікілей интегралдау нәтижесінде $a < r < b$ сақина шекарасындағы мәндерін пайдаланып, төмендегі есептерден $u(r)$ функцияны анықтаңыз:

$а)\ \Delta u(r) = 0, \quad u(a) = A, \quad u(b) = B;$

$б)\ \Delta u(r) = 0, \quad u(a) = A, \quad u_{r}(b) = B;$

$в)\ \Delta u(r) = 0, \quad u_{r}(a) = A, \quad u(b) = B;$

$г)\ \Delta u(r) = 0, u(a) = A, \quad u_{r}(b) + hu(b) = B;$

$д)\ \Delta u(r) = 0, \quad u_{r}(a) - hu(a) = A, \quad u(b) = B,$

$ж)\ \Delta u(r) = 0, \quad u_{r}(a) - hu(a) = A, \quad u_{r}(b) = B;$

$е)\ \Delta u(r) = 0, u(a) = A, u(e) = hu(b), a < c < b, h \neq 0.$

10. Егер $u(r)$ функция $K: a < r < b$, $0 \leq \Psi \leq 2\pi$, $0 < a < b < \infty$ сақинада гармониялық, $\overline{K}$ түйық аймақта үзіліссіз болса $u(a)$ мәнін қалай таңдау керек, егер

$а)\ u(c) = A, \ u(b) = B;$

$б)\ u(c) = A, \ u_{r}(b) = B;$

$в)\ u(c) = A, \ u_{r}(b) + hu(b) = T;$

$г)\ u_{r}(c) = A, \ u(b) = B$ болса.

11. Егер $u(r)$ функция $K: a < r < b$, $0 \leq \Psi \leq 2\pi$, $0 < a < b < \infty$ сақинада гармониялық, туйық K аймақта

үзілсіз болса ол функцияның $u(a)$, $u(b)$ мәндерін анықтаңыз,егер

$a)\ u(c)=A,\ \ u(d)=B;$

$б)\ u_r(c)=A,\ \ u(d)=B$, мұнда $a<c<b,\ \ a<d<b.$

12. $u(r)$ функция $K: x^2+y^2=r^2<R^2$ шеңберде

$$\Delta u(r)=ar,\ \ a\neq 0$$

Пуассон теңдеуінің $\overline{K}$ аймақта үзіліссіз шешімі болсын.

a) егер $u(c)=A$ болғанда $u(R)$ мәнін анықтау керек;

$б)u(R)=A,\ \ u(e)=B$ болғанда R қандай мәнге ие болады, мұнда $0\leq c<R$.

13. $u(r)$ функция K: $a^2<x^2+y^2=r^2<b^2$ сақинада $\Delta u(r)=\dfrac{1}{2}$- Пуассон теңдеуінің $\bar{K}$ аймақта үзіліссіз шешімі болсын.

$a)\ u(b)=A, u(c)=B$ болса, $u(a)-$қандай мәнге ие?

$b)\ u(b)=A, u_r(c)=B$ болса, $u(a)-$қандай мәнге ие?

$в)\ u(c)=A, u(d)=B$ болса, $u(a)$ мен $u_r(b)$ қандай мәндер алады?

$г)\ u(e)=T, u_r(d)=S$ болса, $u_r(a)$ мен $u(b)$ анықтау керек.

14. Шар $\Omega: x^2+y^2+z^2=r^2<R^2$ аймақта $u(r)\subset C^2(\Omega)\cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ функцияны $\Delta u(r)=f(r)$ теңдеуден $u(R)=A;\ \ 0\leq r\leq R$ шартты қанағаттандыратын шешімін анықтаңыз.

15. Біртекті Ω шарда: $x^2+y^2+z^2=r^2<R^2$ көлемдік тығыздығы $6\,Q$ жылу көзі үзбей әсер етеді. Шардағы температура $u(r)$ стационар, ал шар бетінде $u(R)$ тұрақты деп қабылдап, шардағы:

а) егер $u(a)=T$ болғанда $u(R)$ мәні қандай болады ?

б) $u(c)=T,\ u(d)=B$ болғанда, $u(R)$ және R қандай болады ?

г) $u(0)=T_0,\ \ u(R)=T$ болатындай жағдайда R қандай болуы керек ?

16. Аймақ $\Omega: a<r<b,\ r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ 0<a<b<\infty-$ шар қабат, $u(r)$ функция Ω аймақта гармоникалық, ал тұйық $\bar{\Omega}$ аймақта үзіліссіз болсын. Сол $u(r)$ функцияның $u(a)$ мәні қандай болуы керек, егер:

$$а)\ u(c)=A,\ u(B)=B;$$

$$б)\ u(c)=A,\ \ u_r(b)=B;$$

$$в)\ u_r(c)=A,\ \ u(b)=B$$

болса.

§2. Лаплас теңдеуіне қойылған шеттік есептерді Грин формуласымен шешу

Анықтама. Егер екі аргументті $G(x,y)$ Ω аймақта:

1. $G(x,y)=E_n(x,y)+g(x,y)-$Лаплас теңдуінің іргелі шешімі мен гармониялық функция қосындасынан тұрса;

2. $G(x,y)/s=0$ болса, оны Дирихле есебінің (Лаплас теңдеуін) Ω аймақтағы Грин функциясы деп атайды.

Грин функциясын құру мына шекаралық есепті шешуге келеді:

$$\Delta_y g(x,y)=0,\ \ y\in\Omega$$

$$g(x,y)\big|_{y\in S}=-E_n(x,y)\big|_{y\in S}.$$

Егер Грин функциясы белгілі болса, онда төмендегі есептер оңай шешіледі:

$$\Delta u(x)=F(x),\ \ u(x)\big|_S=f(x)\big|_{x\in S}$$

есептің шешімі

$$u(x)=\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{Ss} f(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial y}dS_y-\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\Omega} F(y)G(x,y)dy,$$

мұндағы ω_n – бірлік сфера бетінің ауданы.

Кейбір аймақтар үшін Грин функцияларын келтірейік.

а). жартты кеңістік үшін

$$G(x,y)=\frac{1}{|x-y|}-\frac{1}{|\bar{x}-y|},\ \ n=3,\ \ x_3\geq 0;$$

$$ln\frac{1}{|x-y|}-ln\frac{1}{|\bar{x}-y|},\ \ n=2,\ \ x_2\geq 0$$

мұндағы $x=(x_1,x_2,x_3)$, $\bar{x}=(x_1,x_2,-x_3)$, $n=3$; сонымен жалпы жағдайда жарты кеңістік үшін Грин функциясы

$$G(x,y)=E_n(x,y)-E_n(\bar{x},y),\ \ n=2{,}3.$$

б). Шар үшін, яғни Ω - шар, оның шекарасы

$\sigma: |y|=a-сфера,\ \ n=3:$

$$G(x,y)=\frac{1}{|x-y|}-\frac{a}{|x|}\cdot\frac{1}{|\bar{x}-y|}\qquad \text{немесе}$$

$$G(x,y)=E_3(x,y)-E_3\left(\frac{a}{|x|}x,\frac{|x|}{a}y\right).$$

Мысал. $\Delta u(x)=0$, $u(x)/_{x_n=0}=f(x')\in C(S)$, яғни Лаплас теңдеуі үшін жарты кеңістіктегі Дирихле есебінің шешімі

$$u(x)=-\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{y_n=0} f(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial y_n}dS_y,$$

дербес жағдайда

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial v}\Big/_{y_n=0}=-\frac{\partial G(x,y)}{\partial y_n}\Big/_{y_n=0}=\begin{cases}-\dfrac{2x_3}{|x-y|^3}, n=3\\ -\dfrac{2x_2}{|x-y|^2}, n=2.\end{cases}$$

демек $\quad u(x_1,x_2)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int f(y_1)\frac{x_2}{(x_1-y_1)^2+x_2{}^2}dy_1$ -

жарты жазықтық (n=2),
ал
$u(x_1,x_2,x_3)=$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\int_{-\infty}^{\infty} f(y_1,y_2)\frac{x_3}{\left[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+x_3^2\right]^{3/2}}dy_1dy_2 \text{ -}$$

үш өлшемді жарты кеңістік $n=3$ үшін шешімдері.

Мына есептерді Грин функциясын пайдаланып шешіңіз:

17. $\Delta u(x_1,x_2,x_3=0,\ u\big|_{x_3=0}=\cos x_1\cos x_2, x_3>0$ аймақта;

18. $\Delta u(x_1,x_2,x_3)=e^{-x_3}\sin x_1\cos x_2, u\big|_{x_3=0}=0, x_3>0$ аймақта;

19. $\Delta u(x_1,x_2,x_3)=0, u\big|_{x_3=0}=\Theta(x_2-x_1), x_3>0$ аймақта;

20. $\Delta u(x_1,x_2,x_3)=0, u\big|_{x_3=0}=e^{-4x_1}\sin 5x_2, x_3>0$ аймақта;

21. $\Delta u(x_1,x_2,x_3)=2\left[x_1^2+x_2^2+(x_3+1)^2\right]^{-2}$,
$u(x_1,x_2,x_3)\big|_{x_3=0}=(1+x_1^2+x_2^2)^{-1}, x_3>0$ аймақта;

22. $\Delta u(x_1,x_2)=0,\ u(x_1,x_2)\big|_{x_2=0}=\dfrac{1}{1+x_1^2}, x_2>0$ аймақта;

23. $\Delta u(x_1,x_2)=0,\ u(x_1,x_2)\big|_{x_2=0}=\dfrac{x_1}{1+x_1^2}, x_2\ge 0$ аймақта;

24. $\Delta u(x_1,x_2)=0,\ u(x_1,x_2)|_{x_2=0}=\dfrac{x_1^2-1}{(1+x_1^2)^2},x_2\geq 0$ аймақта;

25. $\Delta u(x_1,x_2)=0,\ u(x_1,x_2)|_{x_2=0}=\cos x_1,x_2\geq 0$ аймақта;

26. $\Delta u(x_1,x_2)=\sigma,\ u(x_1,x_2)|_{x_2=0}=b,x_2\geq 0$ аймақта;

§ 3. Потенциалдар

R^n кеңістікте S шекарамен шектелген Ω аймақ болсын; $\mu(y)\in C(\Omega)$ - үзіліссіз функция делік.

$$u(x)=\int_\Omega E_n(x,y)\mu(y)dy \tag{4.7}$$

көлемдік потенциалдың кейбір ,шекаралық есептерді шешуге қажетті қасиеттеріне келтірейік.

Егер көлемдік потенциалдың тығыздығы $\mu(y)\in C^1(\Omega)$ және шектелсе , онда көлемдік потенциал Ω^+ (ішкі) аймақта

$\Delta u(x)=-\omega_n\mu(x),\quad x\in\Omega^+$

Пуассон теңдеуін қанағаттандырады, мұндағы

$$\omega_n=\begin{cases}2\pi,n=2\\4\pi,n=3.\end{cases}$$

Бұл қасиетті қолданып

$\Delta u(x)=f(x)\in C^1(\Omega^+),(f(x)=-\omega_n\mu(x))$

Пуассон теңдуінің жеке шешімін

$$u_0(x)=-\frac{1}{\omega_n}\int_{\Omega^+}f(y)E_n(x,y)dy$$

анықтай аламыз.

Біртексіз Пуассон теңдеуіне $u(x)=u_0(x)+v(x)$ өрнекпен жаңа $v(x)$ белгісіз функция енгізу нәтижесінде $\Delta v(x)=0-$ Лаплас теңдеуін аламыз.

Демек, Пуассон теңдеуі үшін қойылған шекаралық есепті Лаплас теңдеуі үшін есепке келтіріп шешеміз.

$$w(x)=\frac{1}{\omega_n}\int_S \mu(y)\frac{\partial E_n(x,y)}{\partial \nu_y}d\sigma_y \text{ – қосқабаттық,} \qquad (4.8)$$

$$v(x)=\frac{1}{\omega_n}\int_S \mu(y)E_n(x,y)d\sigma_y \text{ – жайқабаттық} \qquad (4.9)$$

потенциалдар деп аталады. Соңғы екі потенциалдардың Ω^+ аймақтан Ω^- аймаққа өткенде мынадай қасиеттер орынды

$$\begin{aligned} w^+(x_0)&=-\frac{1}{2}\mu(x_0)+w(x_0),\\ w^-(x_0)&=\frac{1}{2}\mu(x_0)+w(x_0), \end{aligned} \qquad (4.10)$$

мұндағы $w(x_0)=\frac{1}{\omega_n}\int_S \mu(y)\frac{\partial E_n(x_0,y)}{\partial \nu_y}d\sigma_y$ және

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial v(x_0)}{\partial \nu_{x_0}}\right)^+&=\frac{1}{2}\mu(x_0)+\frac{\partial v(x_0)}{\partial \nu_{x_0}},\\ \left(\frac{\partial v(x_0)}{\partial \nu_{x_0}}\right)^-&=-\frac{1}{2}\mu(x_0)+\frac{\partial v(x_0)}{\partial \nu_{x_0}}, \end{aligned} \qquad (4.11)$$

ал мұндағы $\frac{\partial v(x_0)}{\partial \nu_{x_0}}=\frac{1}{\omega_n}\int_S \mu(y)\frac{\partial E_n(x_0,y)}{\partial \nu_{x_0}}dS_y$.

Ескерту. Лаплас теңдеуінің іргелі шешімі

$$E_n(x,y)=\begin{cases} ln\frac{1}{|x-y|}, n=2\\ \frac{1}{|x-y|}, n=3 \end{cases}$$

болғандықтан $\frac{\partial E_n(x,y)}{\partial \nu_{x_0}}=\frac{-\cos\Psi_{xy}}{|x-y|^{n-1}}, n=2,3$ үшін және

$$\int_S \frac{\cos\Psi_{xy}}{|x-y|^{n-1}} d\sigma_y = \begin{cases} -\omega_n, x \in \Omega^+ \\ -\omega_{n/2}, x \in \sigma \\ 0, x \in \Omega^- \end{cases}$$

Мысал. Тығыздығы $\mu(y) = \mu_0 = const$ болған $|x| < R$ шардағы көлемдік потенциалды есептеңіз.

Шешуі: Есепті шешуге (4.7) көлемдік потенциал өрнегін және сфералық кордината жүйесін пайдаланамыз, яғни

$$u(x) = \int_\Omega \mu_0 \frac{dy}{|x-y|} = \left| \begin{array}{l} y_1 = r\sin\theta\cos\Psi, \\ y_2 = r\sin\theta\sin\Psi, y_3 = r\cos\theta \end{array} \right| =$$

$$= \mu_0 \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\Psi = \frac{4\pi\mu_0 R^3}{3}.$$

Ескерту. Жай және қос қабаттық потенциалдарды есептегенде сәйкес түрде $d\sigma_y = rd\Psi$ немесе $d\sigma_y = r^2 \sin\theta d\Psi d\theta$ болған бет элементерін пайдаланған қолайлы.

27. $|x| < R$ шарда көлемдік потенциалдарды есептеңіз, егер тығыздығы:

$a)\ \mu(x) = |x|^2;\ \ б)\ \mu(x) = e^{-|x|};$

$в)\ \mu(x) = \dfrac{1}{1+|x|^2};\ \ г)\ \mu(x) = ln\left(1 + \dfrac{|x|}{R}\right)$ болса.

28. $r < R$ шеңбер ішіндегі аймақтық потенциалдардын есептеңіз, егер тығыздығы:

$а)\ \mu(x) = r;\ б)\ \ \mu(x) = r^2;\ в)\ \ \mu(x) = \dfrac{1}{1+r^2};$

$г)\ \ \mu(x) = \sqrt{r};\qquad д)\ \ \mu(x) = sin\, r;\qquad ж)\ \ \mu(x) = cos\, r$

болса.

29. Тығыздығы $\mu(x) = x$ бірлік $x^2 + y^2 = 1$ шеңберге тараған массаның қосқабаттық $u(x, y)$ потенциалын анықта;

30. $\Delta u(x,y,z)=0$, теңдудің $z=1$ шар сыртында

$$u(x,y,z)\big|_{z=1}=x^2-y^2-1,$$

шартты қанағаттандыратын Дирихле есебін шешіңіз.

31. Тығыздығы μ потенциал Ω аймақта

$$u(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^2-4\,,$$

осы потенциалдын тығыздығын табыңыз

32. Жоғардағы 31 есеп шарты бойынша Ω аймақта орналасқан $x^2+y^2+z^2<r^2$ шардың массасын табыңыз.

33. Көлемдік массаның Ω аймақтағы потенциалы $u(x,y)=x^2y^2-1$. Осы аймақтағы $-1\le x\le 1$, $-1\le y\le 1$ квадраттың массасын анықтаңыз.

34. Шеңбер $r^2=x^2+y^2<1$ ішінің масса потенциалы $u(x,y)=\dfrac{\pi}{8}(1-r^4)$ функциямен берілген. Мына $\dfrac{1}{4}<x^2+y^2<1/2$ – сақина ішінің М массасын анықтаңыз.

35. Квадрат $-1\le x\le 1, -1\le y\le 1$ бойынша жайғасқан тығыздығы $\mu(x,y)=xy$ потенциал $J=\int\limits_{x^2+y^2=1}\dfrac{\partial u(y)}{\partial \nu_y}dS_y$ өрнекте. Осы интегралды есептеңіз.

Нұсқау: $\int\limits_S \dfrac{\partial u(y)}{\partial \nu_x}dS_x=-\omega_n\int \mu(y)d\sigma_y$ – Гаусс формуласын пайдалану керек.

Жауаптары

1.

$$\Delta u(r,\theta,\gamma)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\,sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+$$

$$+\frac{1}{r^2\,sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\gamma^2}=0.$$

2. а) $n=2$ $-$гармониялық , $n>2-$емес;
   б) гармониялық; в) емес.

3. а) $f(z)=\frac{1}{z}$; б). $f(z)=z^2+2z$; в) $\upsilon = chx\sin y + C$;

   г) . $\upsilon(x,y)=-chx\cos y + C$; д) $f(z)=2\sin z - z$.

4. Жауаптары жоқ (оңай болғандықтан).

5. Жауабы жоқ.

6. $a) B=0$ мәнінде есеп шешіледі, шешімі $u=cost$, ал $B\neq 0$ жағдайда есеп шешілмейді;

   $б)$ $u(x,y)=2R\left(x^2-y^2\right)+Ry+C$, егер $A=4$; ал $A\neq 4$ жағдайда есеп шешілмейді;

   $г)$ $u(x,y)=-\frac{AR}{4}\left(x^2-y^2\right)+C$, егер $B=\frac{AR^2}{2}$, ал

   $B\neq\frac{AR^2}{2}$ жағдайда есеп шешілмейді.

   $д)$ $u(x,y)=\frac{R^5}{4r^4}(y^2-x^2)-\frac{4R^3}{r^2}y+C$, егер $A=\frac{R^2}{2}$;

   ал $A\neq\frac{R^2}{2}$ мәндерде есеп дұрыс қойылмаған.

7. $a)$ $u(r,y)=\frac{r}{R-R_1}\cos y + C$;

   $б)$ $u(r,\psi)=\frac{r^2\sin 2\Psi}{R^2-R_1{}^2}+\frac{r^3\cos 3\Psi}{R^3-R_1{}^3}+C$;

   $в)$ $u(r,\psi)=A\frac{r^2\cos 2\Psi}{R^2-R_1{}^2}+C$, егер $B=-A$, ал

   $B\neq -A$ мәндерінде $\int\limits_0^{2\pi}(A\cos^2\Psi + B\sin^2\Psi)d\Psi \neq 0$, яғни

   есеп дұрыс қойылмаған болады.

$$д)\ \ u(r,\Psi) = \frac{RR_1 \sin\Psi}{(R_1 - R)r} + \frac{R^5 R_1^{\ 5} \cos 5\Psi}{(R_1^{\ 5} - R^5)r^5} + C.$$

$$ж)\ \ u(r,y) = \frac{RR_1 \sin\Psi}{(R_1 - R)r} + \frac{3R^2 R_1^{\ 2} \cos 2\Psi}{2(R_1^{\ 2} - R^2)r^2} + C,$$

егер $B = 3/2;$ ал $B \neq 3/2$ мәнінде есеп шешілмейді,

себебі $\int\limits_0^{2\pi} f(\Psi)d\Psi \neq 0.$

8. $а)\ \ u(x,y,z) = xe^y \cos z;$

$б)\ \ u(x,y,z) = x(x+y) + z(y-z) + e^x \sin z;$

$в)\ \ u(x,y,z) = x \sin y ch z + sh z \cos y;$

$$г)\ \ u(x,y,z) = x^3 + z(2x^2 - y) - 3xz^2 - \frac{2}{3}z^3 = 2;$$

$д)\ \ u(x,y,z) = xz + \cos 2x ch 2z - \sin 2y ch 2z.$

9. $$а)\ \ u(z) = A + (B - A)\frac{\ln r/a}{\ln b/a};$$

$б)\ \ u(r) = A + bB \ln r/a;$

$в)\ \ u(r) = B + aA \ln r/b;$

$$г)\ \ u(r) = A + \frac{b(B - hA)\ln r/a}{1 + bh \ln b/a};$$

$$д)\ \ u(r) = B + \frac{a(A + hB)\ln \frac{r}{b}}{1 + ah \ln \frac{b}{a}};$$

$$ж)\ \ u(r) = \frac{bB - aA}{ah} + bB \ln \frac{z}{a};$$

$$е)\ \ u(x) = A \frac{h \ln \frac{r}{a} - \ln \frac{r}{c}}{h \ln \frac{a}{b} - \ln \frac{a}{c}}.$$

10. а) $u(a)=\dfrac{A\ln\frac{b}{a}-B\ln\frac{c}{a}}{\ln b/c}$;

б) $u(a)=A-bB\ln\dfrac{c}{a}$;

в) $u(a)=\dfrac{A\left(1+bh\ln\frac{b}{c}\right)-bT\ln\frac{c}{a}}{1+bh\ln\frac{b}{c}}$;

г) $u(a)=B-cA\ln b/a.$

11. а) $u(a)=\dfrac{A\ln\frac{a}{d}-B\ln\frac{a}{c}}{\ln\frac{c}{d}}$, $u(b)=\dfrac{A\ln\frac{b}{d}-B\ln b/c}{\ln c/d}$;

б) $u(a)=B+cA\ln\dfrac{a}{d}$, $u(b)=B+cA\ln b/d.$

12. а) $u(R)=A+\dfrac{a\left(R^3-C^3\right)}{9}$;

б) $R=\sqrt[3]{C^3+\dfrac{9}{a}(A-B)}.$

13. а) $u(a)=a-c+B+\dfrac{(B-A)\ln\frac{a}{c}}{(c-d)\ln\frac{c}{b}}$;

б) $u(a)=c-b+A+c(B-1)\ln\dfrac{a}{b}$;

в) $u(a)=a-c+A+\dfrac{(B-A+c-d)\ln\frac{a}{r}}{\ln\frac{d}{c}}$,

$$u_r(b)=1+\frac{B-A+c-d}{b\ln\frac{d}{c}};$$

г) $$u_r(a)=\frac{a+d(v-1)}{a},$$

$$u(b)=T+b-c+d(v-1)\ln\frac{b}{c}.$$

14. $$u(r)=A-\int_r^R\frac{1}{\rho^2}\left[\int_0^\rho t^2 f(t)dt\right]d\rho.$$

15. а) $u(R)=T+\frac{Q}{K}(a^2-R^2)$, мұнда $\Delta u(r)=-\frac{6Q}{k}$ теңдеуді пайдалану керек.

б) $$u(R)=\frac{B(R^2-C^2)-A(R^2-d^2)}{d^2-c^2},\quad Q=\frac{(B-A)k}{c^2-d^2};$$

в) $$R=\sqrt{\frac{k(T_0-T)}{Q}}.$$

16. а) $$u(a)=A+\frac{b(c-a)}{a(c-b)}(B-A);$$

б) $$u(a)=A+\frac{b^2B(a-c)}{ac};$$

в) $$u(a)=A+\frac{c^2(a-b)B}{ab}.$$

17. $e^{-\sqrt{2}x_3}\cos x_1\cos x_2;$

18. $(e^{-\sqrt{2}x_3}-e^{-x_3})\sin x_1\cos x_2;$

19. $\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctg\frac{x_2-x_1}{\sqrt{2}x_3}.$

20. $e^{-4x_1-3x_3}\sin 5x_2.$

21. $u(x_1,x_2,x_3)=\left[x_1^2+x_2^2+(x_3+1)^2\right]^{-1}$.

22. $u(x_1,x_2)=\dfrac{x_2+1}{x_1^2+(x_2+1)^2}$.

23. $u(x_1,x_2)=\dfrac{x_1}{x_1^2+(x_2+1)^2}$.

24. $u(x_1,x_2)=\dfrac{x_1^2-(x_2+1)^2}{\left[x_1^2+(x_2+1)^2\right]^2}$.

25. $u(x_1,x_2)=e^{-x_2}\cos x_1$.

26. $u(r,\Psi)=\dfrac{a}{4}(R^2-r^2)+b$.

27. а) $\dfrac{4\pi R^5}{5|x|}$, $|x|\geq R$; $\pi\left(R^4-\dfrac{|x|^4}{5}\right)$, $|x|\leq R$;

б) $\dfrac{4\pi}{|x|}\left[2-e^{-R}\left(2+2R+R^2\right)\right]$, $|x|\geq R$;

в) $\dfrac{4\pi}{|x|}(R-arctgR)$, $|x|\geq R$;

$$4\pi\left(1-\frac{arctg|x|}{|x|}+ln\sqrt{\frac{1+R^2}{1+|x|^2}}\right),\quad |x|\leq R.$$

г) $\dfrac{2\pi R^3}{9|x|}(12ln2-5)$, $|x|\geq R$;

$$\frac{\pi}{3}\left[\left(\frac{2R^3}{|x|}+3R^2-|x|^2\right)ln\left(1+\frac{|x|}{R}\right)^2+\frac{5}{3}|x|^2+2|x|(R-3)-R^2\right],$$

$|x|\leq R$.

28.

а) $-\dfrac{2}{3}\pi R^2 \ln r,\ r \ge R;\ \dfrac{2\pi}{9}\left[R^3(1-4\ln R)-r^3\right],\ r \le R.$

б) $-\dfrac{\pi}{2} R^4 \ln r,\ r \ge R;\ \dfrac{\pi}{8}\left[R^4(1-4\ln r)-r^4\right],\ r \le R.$

в) $-2\pi \ln r \ln\sqrt{1+R^2},\ r \ge R;\ -2\pi\Big[\ln r \ln\sqrt{1+R^2}-$

$-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^R \frac{\ln(1+r_1^2)}{r_1}dr_1\Big],\ r \le R.$

г)

$$-\frac{4}{5}\pi R^{\frac{5}{2}} \ln r,\ r \ge R;\quad -\frac{4}{5}\pi\left[R^{\frac{5}{2}} \ln R+\frac{2}{5}\left(r^{\frac{5}{2}}-R^{\frac{5}{2}}\right)\right],\ r \le R.$$

д) $2\pi(R\cos R-\sin R)\ln r,\ r \ge R;$

$$2\pi\left(R\ln R-\ln R\sin R+\sin r-\sin R++\int_r^R \frac{\sin r_1}{r_1}dr_1\right),\ r \le R.$$

ж) $2\pi \ln r(1-R\sin R-\cos R),\ r \ge R;$

$$2\pi\left[\ln r-\ln R(R\sin R+\cos R)+\cos r-\cos R+\int_r^R \frac{\cos r_1}{r_1}dr_1\right],$$

$r \le R.$

29. $u(x,y)=\begin{cases}-\dfrac{x}{2},\ егер\ x^2+y^2<1,\\ \dfrac{x}{2(x^2+y^2)},\ егер\ x^2+y^2>1.\end{cases}$

30. $u(x,y,z)=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}-\dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}.$

31. $-\dfrac{5}{\pi}(x^2+y^2+x^2).$

32. $-4r^5 = M$.

33. $\mu = -\frac{8}{3\pi}$.

34. $\mathrm{M} = 3\pi/32$.

35. $J = 0$.

V тарау. ФУРЬЕ (АЙНЫМАЛЫЛАРҒА ЖІКТЕУ) ӘДІСІ

§1. Фурье әдісінің жалпылама сұлбесі және оны әртүрлі теңдеулерге қолдану

Қарапайым

$$Lu \equiv \frac{1}{\rho(x)}(div(p(x)grad u) - q(x)u) = A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + B\frac{\partial u}{\partial t} \quad (5.1)$$

екінші ретті айнымалы коэффициентті, сызықтық, дербес туындылы теңдеу үшін қойылған аралас есептерге Фурье әдісін қолдану мәселесін қысқаша келтірейік. Бұл теңдеудегі

$$\rho(x), q(x) \in C([\Omega]); p(x) \in C^1([\Omega]); \rho(x), p(x) > 0;$$

$q(x) \geq 0; \forall x \in \Omega$ белгілі, ал $u(x,t)$-белгісіз функция.

Егер (5.1) теңдеудегі A=1,B=0 болса, онда (5.1)-гиперболалық, егер A=0,B=1 болса –параболалық, ал A=-1 ,B=0 жағдайда- элиптикалық болатыны айқын.

Фурьенің белгісіз функцияны оның аргументтеріне жекелей тәуелді болған функцияларға жіктеу нәтижесінде, яғни белгісіз $u(x,t)$ функцияны есептегі шекаралық шарттарды қанағаттандыратындай $X_k(x)T_k(t)$ көбейтінді ретінде іздеп; одан кейін суперпозиция қағидасын пайдаланып есептің шешуін

$$u(x,t) = \sum_k C_k X_k(x) T_k(t) \quad (5.2)$$

түрінде анықтайды, мұндағы белгісіз C_k коэффициенттерді есептегі бастапқы шарттар орындалатындай етіп таңдап алады.

,Бұл (5.2) шешімдегі $X_k(x)$ қарастырылып жатқан аралас есепке сәйкес меншікті функциялар.

Фурье әдісі түсінікті болуы үшін әрбір типтегі аралас есептер үшін қысқаша тоқталайық.

1. Гиперболалық теңдеу үшін аралас есеп:

Төртбұрыш $(0,\ell)\times(0,T)$ аймақта

$$Lu(x,t)=\rho(x)u_{tt} \tag{5.3}$$

теңдеуден $[0,\ell]$ кесінді шекарасында

$$\begin{gathered}\Gamma_1 u\equiv\alpha u_x(0,t)+\beta u(0,t)=0,\\ \Gamma_2 u\equiv\gamma u_x(l,t)+\delta u(l,t)=0,\end{gathered} \tag{5.4}$$

$$(\alpha^2+\beta^2\neq 0,\quad \gamma^2+\delta^2\neq 0)$$

шекаралық және

$$u(x,0)=\varphi(x),\qquad u_t(x,0)=\psi(x) \tag{5.5}$$

бастапқы шарттарды қанағаттандыратын $u(x,t)$ функцияны анықтау керек.

2. Параболалық теңдеу үшін аралас есеп:

Төртбұрыш $(0,\ell)\times(0,T)$ аймақта

$$Lu(x,t)=\rho(x)u_t \tag{5.6}$$

теңдеуден (5.4) шекаралық және

$$u(x,0)=\varphi(x), \tag{5.7}$$

батапқы шарттарды қанағаттандыратын $u(x,t)$ температураны анықтау керек.

Бұл екі есеп үшін де белгісіз $u(x,t)$ функцияны Фурье әдісі бойынша

$$u(x,t)=X(x)T(t)\neq 0 \tag{5.8}$$

түрінде іздейді. Бұл өрнекті (5.3) немесе (5.6) дербес туындылы теңдеуге қойған кезде X(x),T(t) функциялар үшін жай диффференциалдық теңдеулер алынады. Оның X(x) функциясы үшін теңдеуіне

$$X''(x)+\lambda^2 X(x)=0,\quad \Gamma_1 X(x)=0,\Gamma_2 X(x)=0 \tag{5.9}$$

түріндегі Штурма-Лиувиль есебін қарастырып, ол есептің меншікті сандары мен меншікті функциялары арқылы (5.8) түріндегі шешімдерін анықтаймыз.

1-ескерту. Фурье әдісін шешу процесінде жай диффференциалдық теңдеу курсындағы Штурма-Лиувиль есебінің қасиеттерімен белгілі шарттарды қанағаттандыратын функцияның Фурье қатарына жіктелудің (Стеклов теоремасы т.б.) анализдегі мағлұматтарды алынған шешімнің регулярлық екенін дәлелдеуге пайдаланамыз.

2-ескерту. Фурье әдісі жоғарғы ретті теңдеулер үшін және көп аргументті функциялар үшін де жоғарыдай принциптермен қолданады.

3-ескерту. Осы келтірілген әдісті элиптикалық теңдеу үшін де қолданады. Кейбір жағдайда Штурма-Лиувиль есебі айнымалы коэфициентті жай дифференциалдық теңдеуге келтіріп, оның меншікті функциялары арнайы функциялар түрінде анықталады.

§ 2. Біртекті емес аралас есеп үшін Фурье әдісі.

Мәселен гиперболалық теңдеу үшін

$$Lu(x,t) - \rho(x)u_{tt} = f(x,t)\,, \tag{5.10}$$

$$\Gamma_1 u = \mu_1(t), \Gamma_2 u = \mu_2(t)\,, \tag{5.11}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x) \tag{5.12}$$

аралас есепті Фурье әдісімен шешу үшін біріншіден (5.11)-шекаралық шарттарды біртекті болатындай етіп $\omega(x,t)$ функцияны

$$\Gamma_1\omega(x,t,) = \mu_1(t), \;\; \Gamma_2\omega(x,t) = \mu_2(t)$$

шарттарды қанағаттандыратындай таңдап, оған белгісіз функцияны

$$u(x,t) = v(x,t) + \omega(x,t) \tag{5.13}$$

түрінде алмастырамыз.Нәтижеде (5.10)-(5.12) есеп

$$\left.\begin{aligned} &Lv(x,t) - \rho(x)v(x,t) = F(x,t), \\ &\Gamma_1 v(x,t) = \Gamma_2 v(x,t) = 0, \\ &v(x,0) = \varphi_1(x), v_t(x,0) = \psi_1(x) \end{aligned}\right. \tag{5.14}$$

аралас есепке келеді.

Бұл есептің шешімін

$$v(x,t) = v_1(x,t) + v_2(x,t) \tag{5.15}$$

түрінде іздейміз. $v_1(x,t)$ функция жоғарыдағы (5.3)-(5.5) аралас есптің шешімі, ал $v_2(x,t)$ болса

$$\begin{aligned} &Lv_2(x,t) - \rho(x)v_2(x,t) = F(x,t), \\ &\Gamma_1 v_2(x,t) = \Gamma_2 v_2(x,t) = 0, \end{aligned} \tag{5.16}$$

$v_2(x,0) = v_{2t}(x,0) = 0$ есептің шешімі.

Бұл соңғы (5.16) есептің шешімін

$$v_2(x,t) = \sum_k T_k(t) X_k(t) \tag{5.17}$$

түрінде іздейміз, мұндағы $X_k(x)$-жоғарыдағы $v_1(x,t)$-біртекті аралас есептегі Штурма-Лиувиль есебінің меншікті функцияларыы, ал $T_k(t)$-белгісіз; ал (5.16) есептегі $F(x,t)$ функцияны

$$F(x,t) = \sum_k f_k(t) X_k(t) \tag{5.18}$$

түрінде Фурье қатарына жіктеп ($f_k(t)$-белгілі Фурье коэфициенттері) (5.17) қатармен бірге (5.16) есепке қойған кезде белгісіз $T_k(t)$ функцияларды анықтау үшін

$$T_k''(t) + \left(\frac{\lambda_k}{\rho(x)}\right)^2 T_k(t) = -\frac{1}{\rho(x)} f_k(t), \tag{5.19}$$

$$T_k(0) = 0, T_k'(0) = 0$$

есепке келеміз; бұл есеп тұрақты коэфициенттерді вариациялау әдісімен шешіледі.

Міне осылайша біртекті емес аралас есеп шешіледі.

Келтірілген әдістерді пайдаланып төмендегі гиперболалық, параболалық және элиптикалық есептер үшін қойылған аралас есептерді Фурьенің айнымалыларға жіктеу әдісімен шешіңіз.

1. $u_{tt} = u_{xx} + x,\ 0 < x < \pi,\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0,$

$$u\big|_{t=0} = \sin 2x,\ u_t\big|_{t=0} = 0.$$

2. $u_{tt} = u_{xx},\ u(0,t) = u(l,t) = 0,\ u(x,0) = 0,$

$$u_t(x,0) = \sin\frac{2\pi}{l}x.$$

3. $u_{tt} = u_{xx},\ u(0,t) = 0,\ u_x(l,t) = 0,\ u(x,0) = \sin\frac{5\pi}{2l}x,$

$$u_t(x,0) = \cos\frac{\pi}{2l}x.$$

4. $u_{tt} = u_{xx},\ u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0,\ u(x,0) = x,\ u_t(x,0) = 1.$

5. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x),\ u(0,t) = \alpha,\ u(l,t) = \beta,$

$u(x,0) = u_t(x,0) = 0.$

6. $u_{tt} = u_{xx} + Ae^{-t}\cos\frac{\pi}{2l}x,\ u_x(0,t) = u(l,t) = 0,$

$u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0.$

7. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \sin 2t,\ u_x(0,t) = 0,\ u_x(l,t) = \frac{2}{a}\sin\frac{2l}{a}\sin 2t,$

$$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = -2\cos\frac{2x}{a},\ 0 < x < l,\ t > 0.$$

8. $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ u(0,t) = u_x(l,t) = 0,\ 0 < x < l,$

$$u(x,0) = \frac{1}{15}\sin\frac{11\pi}{2l}x\cos\frac{4\pi}{2l}x,\ u_t(x,0) = 0,\ 0 < x < l,\ t > 0.$$

9. $u_{tt} - 7u_t = u_{xx} + 2u_x - 2t - 7x - e^{-x}\sin 3x,\ 0 < x < \pi,$

$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=\pi} = \pi t,\ u\big|_{t=0} = 0,\ u_t\big|_{t=0} = x.$$

10. $\frac{1}{a^2}u_{tt} = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{rr}$ теңдеуді қанағаттандыратын, радиусы R дөңгелек мембрана (шеттері бкітілген) еркін тербелісін табыңыз, яғни

$$u\big|_{r=a} = 0, u\big|_{t=0} = u_0(r,\varphi), u_t\big|_{t=0} = u_1(r,\varphi) \Rightarrow u(r,\varphi) = ?$$

§ 3. Фурье әдісін көп айнымалы гиперболалық теңдеуге қолдану. Тортбұрыш мембрананың еркін тербелуі

Мембрана шекарасы σ болған $\Omega = \{0 \le x \le p\} \times \{0 \le y \le q\}$ төртбұрышпен бірдей болсын. $u(x,y,t)$ функцияны мембрананың (x,y) нүктесінің t уақыт кезіндегі ауытқуы деп қабылдасақ, онда төртбұрышты мембрананың R^2 жазықтықтағы тербелісі

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) \tag{5.20}$$

теңдеумен өрнектеледі. Осы теңдеудің мынадай шекаралық

$$u\big|_{\sigma} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u(0,y,t) = 0, u(p,y,t) = 0, \ 0 \le y \le q, \\ u(x,0,t) = 0, u(x,q,t) = 0, \ \ 0 \le x \le p \end{cases} \quad (5.21)\text{-}(5.22)$$

шарттар мен және

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y), \ \ u_t(x,y,o) = \psi(x,y) \tag{5.23}$$

бастапқы шарттарды қанағаттандыратын шешімін табу керек.

Бұл есеп дұрыс қойылған болуы үшін (5.21)-(5.22) шекаралық шарттармен (5.23) бастапқы шарттар бірімен-бірі үйлесуі лазым, яғни

$$\varphi\big|_{\sigma} = 0, \quad \psi\big|_{\sigma} = 0 \tag{5.24}$$

орындалсын.

Бұл (5.20)-(5.24) есептің шешімін

$$u(x,y,t) = v(x,y)T(t) \tag{5.25}$$

түрінде іздеп, оны (5.20) теңдеуге қойып

$$\frac{T''}{a^2T} = \frac{v_{xx} + v_{yy}}{v}$$

өрнегін аламыз, ал бұл соңғы орнектен белгілі заңдылықпен

$$T''(t) + (\lambda a)^2 T(t) = 0\,, \tag{5.26}$$

$$v_{xx} + v_{yy} + \lambda^2 v = 0 \tag{5.27}$$

теңдеулерді аламыз.

Әдетте (5.27) теңдеу Гельмгольц теңдеуі деп аталады. (5.21)-(5.22) шекаралық шарттардан $v(x,y)$ фугкция үшін (5.27) теңдеуді шешуге керекті

$$v(0,y)=v(p,y)=0; \quad v(x,0)=v(x,q)=0 \qquad (5.28)$$

шарттарды аламыз. Ал (5.27)-(5.28) есептің шешімін

$$v(x,y)=X(x)Y(y) \qquad (5.29)$$

түрінде іздесек және ол шешімді (5.27) теңдеуге қойып

$$\frac{Y''}{Y}+\lambda^2=-\frac{X''}{X}\Rightarrow\frac{Y''}{Y}+\lambda^2=-\frac{X''}{X}=\mu^2\Rightarrow$$

өрнегін аламыз; бұдан

$$X''(x)+\mu^2X(x)=0\,, \qquad (5.30)$$

$$Y''(y)+v^2Y(y)=0, \quad v^2=\lambda^2-\mu^2 \qquad (5.31)$$

қарапайым теңдеулер шығады.

Егер (5.29) шешімді (5.28) шарттарға қойсақ, онда (5.30) мен (5.31) есептерді шешуге керекті шекаралық шарттарды аламыз:

$$X(0)=X(p)=0\,, \qquad (5.32)$$

$$Y(0)=Y(q)=0\,. \qquad (5.33)$$

Сонымен біз (5.30), (5.32) есебімен (5.31), (5.33) есептерінің Штурма-Лиувиль есептері екенін пайдаланып, бірден олардың сәйкес түрде меншікті сандары мен меншікті функциялары:

$$\mu_k^2=\left(\frac{k\pi}{p}\right)^2, \quad X_k(x)=sin\frac{k\pi}{p}x, \quad k=1,2,.. \qquad (5.34)$$

$$v_s^2=\left(\frac{s\pi}{q}\right)^2, \quad Y_s(y)=sin\frac{s\pi}{q}y, \quad s=1,2,... \qquad (5.35)$$

Ендеше (5.27)- (5.28) есеп үшін меншікті сандар мен меншікті функциялар

$$\lambda_{ks}^2=\mu_k^2+v_s^2=\left(\frac{k\pi}{p}\right)^2+\left(\frac{s\pi}{q}\right)^2,$$

$$v_{ks}(x,y)=X_k(x)Y_s(y)=sin\frac{k\pi}{p}x\,sin\frac{s\pi}{q}y,\ k,s=1,2,.. \quad (5.36)$$

Онда (5.26) теңдеуде $\lambda^2 = \lambda_{ks}^2$ деп интегралдасақ, оның шешімі

$$T_{ks}(t)=A_{ks}\cos\lambda_{ks}at+B_{ks}\sin\lambda_{ks}at$$

болады. Демек жалпы (5.20) теңдеудің (5.21)- (5.22) шарттарды қанағаттандыратын шешімі

$$u(x,y,t)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}(A_{ks}\cos\lambda_{ks}at+B_{ks}\sin\lambda_{ks}at)\sin\mu_k x\sin\nu_k y \quad (5.37)$$

мұндағы белгісіз A_{ks}, B_{ks} еселіктер (5.23) шартқа байланысты табылады, яғни

$$\varphi(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}A_{ks}\sin\mu_k x\sin\nu_k y, \quad (5.38)$$

$$\psi(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}B_{ks}\lambda_{ks}a\sin\mu_k x\sin\nu_k y \quad (5.39)$$

Фурье қатарларының еселіктері деп үйғарсақ, онда

$$A_{ks}=\frac{4}{pq}\int_0^p dx\int_0^q\varphi(x,y)\sin\mu_k x\sin\nu_k y\,dy,$$

$$B_{ks}=\frac{4}{\lambda_{ks}apq}\int_0^p dx\int_0^q\psi(x,y)\sin\mu_k x\sin\nu_k y\,dy$$

анықтаймыз. Бұларды (5.37) өрнекке қойсақ есепті шешкен боламыз.

Әрине,есептің шешімі (5.37) қатар бірқалыпты жинақты.

Мына есептерді шешіңіз:

11. Төртбұрышты $0\le x\le p,\ 0\le y\le q$ мембрананың $x=0,\ 0\le y\le q$ шекарасы бос, ал қалған жақтары бекітілген

деп үйғарып мембрананың тербелісін мынадай бастапқы шарттарды:

а) $u(x,y,0)=\cos\frac{\pi x}{2s}\sin\frac{\pi y}{p}, \quad u_t(x,y,0)=0;$

б) $u(x,y,0)=0, \quad u_t(x,y,0)=B(s-x)\sin\frac{\pi y}{p}$

қанағаттандырған шешімдерін анықтау керек.

12. Жиектері бекітілген төртбұрыштық (квадраттық) $(0<x<p)$, $(0<y<p)$ мембрана тербелісінің бастапқы

$$u\big|_{t=0}=A\sin\frac{\pi x}{p}\sin\frac{\pi y}{p}, u_t\big|_{t=0}=0$$

мәндері болған еркін тербелісін табыңыз.

13. Мына аралас есепті:

$$u_{tt}=\Delta u,\ 0<x<\pi,\ \ 0<y<\pi\,,$$

$$u\big|_{x=0}=u\big|_{x=\pi}=u\big|_{y=0}=u\big|_{y=\pi}=0\,,$$

$$u\big|_{t=0}=3\sin x\sin 2y, u_t\big|_{t=0}=3\sin 3x\sin 4y$$

шешіңіз.

Ескерту. Басқа типтегі көп аргументті теңдеу үшін қойылған аралас есептерді де осылайша шешуге болады.

§ 4. Параболалық теңдеу үшін Фурье әдісі

14. $u_t=4u_{xx},\ 0<x<l, t>0,\ \ u(0,t)=u(l,t)=0,$
$u(x,0)=Bx;$

15. $u_t=25u_{xx}, 0<x<l, t>0, u_x(0,t)=u_x(l,t)=0,$
$u(x,0)=A;$

16. $u_t=25u_{xx}-4u, 0<x<l, t>0, u(0,t)=u_x(l,t)=0,$
$u(x,0)=\sin\frac{\pi x}{2l};$

17. $u_t=25u_{xx}, 0<x<l, t>0, u_x(0,t)=u_x(l,t)=P,$
$u(x,0)=Bx;$

18. $u_t = a^2 u_{xx}, 0 < x < l, t > 0, u\ (0,t) = 0,$

$u_x(l,t) = Ae^{-t}, u(x,0) = T;$

19. $0 \le r < R$ шарда $u_t = a^2 u(r,t)$ теңдеуді қанағаттандыратын $u = u(r,t)$ -шектелген $u(R,t) = 0$, $u(r,0) = \sin\frac{r}{a}, t > 0$ шарттарды қанағаттандырған шешімді анықта.

20. $0 \le r < R$ шарда $u_t = a^2 \Delta u(r,t) - du, t > 0, d > 0,$

$$|u(r,t)| < \infty, \quad u_r(R,t) = 0 \text{ және } u(r,0) = \begin{cases} A, 0 \le r < R/2, \\ 0, R/2 < r < R \end{cases}$$

шарттарды қанағаттандырған шешімді анықта.

21. Мына $0 < x < p, 0 < y < q$ төртбұрышта

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + A\,sin\frac{3\pi x}{2p}cos\frac{\pi y}{2s} \text{ теңдеудің}$$

$$u(0,y,t) = u_x(p,y,t) = 0, \quad 0 < y < s, t > 0,$$

$$u_y(x,0,t) = u(x,s,t) = 0, \quad 0 < x < p, t > 0,$$

$$u(x,y,0) = B\,sin\frac{\pi x}{2p}cos\frac{3\pi y}{2s}, \quad 0 < x < p, \quad 0 < y < s$$

шарттарды қанағаттандыратын шешімін анықта.

22. $u_t - u_{xx} - u = xt(2-t) + 2cos\,t, \quad 0 < x < \pi, \quad u_x|_{x=0} = t^2,$

$u_x|_{x=\pi} = t^2, \quad u|_{t=0} = x^2 + 2.$

23. Мына аралас есепке Бессель функциясын пайдаланып шешіңіз:

$$u_t = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + tJ_0(\mu_1 r), \ |u|_{r=0} < \infty, \ u|_{r=1} = 0,$$

$$u(r,t)\big|_{t=0} = 0,$$

мұндағы μ_1 -мына $J_0(\mu) = 0, 0 < r < 1$ Бессель теңдеуінің оң түбірі.

§ 5. Эллиптикалық теңдеулер үшін Фурье әдісі

24. Төртбұрыш $0 < x < p, 0 < y < s$ аймақта $\Delta u(x,y) = 0$ теңдеудің

$$u_x(0,y) = u_x(p,y) = 0, u(x,0) = V, u(x,s) = Ax$$

шарттарды қанағаттандыратын шешімін анықта.

25. Төртбұрыш $0 < x < p, 0 < y < s$ аймақта Лаплас теңдеудің мына

$$u(0,y) = 0,\ u(p,y) = Ay,\ u(x,0) = 0,\ u(x,s) = \frac{sAx}{p}$$

шарттарды қанағаттандыратын шешімін анықта.

26. Жарты жолақ $0 < x < \infty, 0 < y < l$ аймақта Лаплас теңдеуінің

$$u\ (x,0) = u_y(x,l) = 0, u(0,y) = e^{-y}, u(\infty,y) = 0$$

шарттарды қанағаттандыратын шешімін анықта.

27. Шеңбер $0 \le r < R$ шекарасында $u(r,\varphi) = \varphi \sin\varphi$ шартты қанағаттандыратын шеңбер ішінде гармониялық функцияны анықта.

28. 27 есептегі аймақтың шекарасында $u_r(R,\varphi) = sh\varphi$ шартты қанағаттандыратын гармониялық функцияны анықта.

29. $0 \le r < R$ шеңбер сыртында Лаплас теңдеуінің шешімі $u_r(R,\varphi) = 0.5 + \varphi \sin 2\varphi$ шекаралық шартты қанағаттан - дыратын шешімін анықта.

30. $a < r < b$ сақинада гармониялық және $u_r(a,\varphi) = a\cos\varphi, u(b,\varphi) = B + T\sin 2\varphi$ шарттарды қанағаттандыратын функцияны анықта.

31. Айнала сектор $0 < r < R, 0 < \varphi < \alpha$ аймақта мына шарттарды $u(r,0) = u(r,\alpha) = 0, u_r(R,\varphi) = A$ қанағаттандыратын гармониялық функцияны анықта.

§ 6. Фурье әдісіне арнайы функцияларды қолдану

Жоғарыда дербес туындылы теңдеулер үшін аралас есптерді кесінді, цилиндрлік және төртбұрыш аймақтарда Фурье тәсілімен қарастырғанда тұрақта коэфициентті, сызықты 2-реттік жай дифференциалдық теңдеу үшін Штурма-Лиувиль есебінің меншікті функциялары үшін белгілі аралықта тола тригонометриялық функциялар жиынын пайдаландық.

Егерде математикалық физиканың шекаралық есептерін шеңбер, цилиндр және шар секілді аймақтарда шешетін болсақ, Штурма-Лиувиль есебі айнымалы коэфициентті, сызықтық жай дифференциалдық теңдеулер үшін қарастырылады. Әдетте мұндай Штурма-Лиувиль есептерінің меншікті функциялары белгілі бір аралықта, салмақ функцияға салыстырғанда ортогоналдық және қасиеттері бар арнайы функцияларды пайдалануға тура келеді.

Мәселен,

$$x^2 y'' + xy' + (\lambda^2 x^2 - v^2)y = 0, \; 0 < x < l \tag{5.40}$$

теңдеуге

$$|y(0)| < \infty, y(l) = 0 \tag{5.41}$$

шарттармен Штурма-Лиувиль есебінің меншікті функциялары

$$\left\{ J_v\left(\frac{\mu_k}{l} x \right) \right\}, \quad k = 1,2,.. \tag{5.42}$$

$(0,l)$ аралықта $\rho(x)=x$ салмақ функцияға салыстырғанда тола жиын құрайды. Сондықтан $[0,l]$ кесіндідегі кез - келген құрақты-жатық және есептің шекаралық шарттарын қанағаттандыратын (5.42) секілді (ол Бессель функциясы) арнайы функциялар бойынша қатарға жіктеуге болады.

Міне осы қысқаша берген мағлұматтарды ескере отырып, Фурье әдісіне арнайы функцияларды пайдаланып шекаралық есептерді шешейік.

Мысал. Дөңгелек мембрананың еркін тербелуі

$\Omega : x^2+y^2<l$ шеңберінде $u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy})$ теңдеуді $u\big|_{\sigma}=0,\ \sigma : x^2+y^2=l$ шекаралық және $u(x,y,0)=\varphi(x,y),\quad u_t(x,y,0)=\psi(x,y)$ бастапқы шарт - тармен шешу керек.

Егер бұл есептегі белгілі φ,ψ функциялар тек радиандық $r=\sqrt{x^2+y^2}$ айнымалыға тәуелді болсын деп қабылдасақ жоғарыдағы есеп

$$u_{tt}=a^2(u_{rr}+\frac{1}{r}u_r),\quad 0\le r\le l, t>0, \tag{5.43}$$

$$u(r,t)\big|_{r=l}=0, \tag{5.44}$$

$$u(r,0)=\varphi(r), u_t(r,0)=\psi(r) \tag{5.45}$$

түрге келеді. Бұл есептің шенелген шешімін табу үшін Фурье әдісін қолданайық,яғни $u(r,t)$ функцияны

$$u(r,t)=R(r)T(t) \tag{5.46}$$

көбейткіш ретінде іздейміз. (5.46)-өрнекті (5.43)-(5.44) теңдеумен шекаралық шартқа қойып

$$T''(t)+(a\lambda)^2T(t)=0 \tag{5.47}$$

теңдеумен мына

$$r^2R''(r)+rR'(r)+(ar)^2R(r)=0,$$
$$|R(0)|<\infty, R(l)=0$$

Штурма-Лиувиль есебіне келеміз. Соңғы есептің меншікті мәндері мен меншікті функциялары

$$\lambda_k^2=\left(\frac{\mu^0{}_k}{l}\right)^2, R_k(r)=J_0\left(\frac{\mu^0{}_k}{l}r\right), k=1,2,..$$

яғни меншікті функциялар, жоғарыда ескерткендей, Бессельдың $\nu=0$-ретті функциялары. Ал (5.43)-(5.45) есептің шешімі

$$u(r,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[A_k\cos\frac{\mu^0{}_k}{l}at+B_k\sin\frac{\mu^0{}_k}{l}at\right]J_0\left(\frac{\mu^0{}_k}{l}r\right)$$

мұндағы A_k, B_k коэфициенттер, белгілі тәсілмен, бастапқы шарттар арқылы анықталады.

Келтірілген мағлұматтар мен мысалды пайдаланып, төмендегі есптерді шешіңіз.

32. $u_{tt}=25\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right),\ 0\le r<l, t>0,$

$$|u(0,t)|<\infty, \qquad u(l,t)=0, t>0\ ,$$
$$u(r,0)=\sqrt{r} \qquad u_t(r,0)=\sqrt[3]{r}, 0\le r<R\ .$$

33. $u_{tt}=a^2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right),\quad 0\le r<R, t>0,$

$$|u(0,t)|<\infty,\quad t>0\ ,\quad u(R,0)=0\ ,$$
$$u(r,0)=B(R^2-r^2)\ ,\quad u_t(r,0)=0, 0\le r<R\ .$$

34. $u_{tt}=25\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right),\ \ 0\le r<R, t>0\ ,\ |u(0,t)|<\infty,$

$$u(R,t) = 0,\ t > 0,\ \ u(r,0) = 0,\ \ u_t(r,0) = A,\ 0 \le r < R.$$

35. $bu_t = \Delta(r,t)$, $u(r,0) = f(r)$, $-k\dfrac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=a} = xu\big|_{r=a}$

ұзын, радиусы a цилиндрдің салқындау құбылысы.

36. Радиусы R шексіз цилиндрдің бастапқы температурасы Ar^2, ал цилиндрдің шекарасы жылу өткізеді. Цилиндрдегі температураның орналасуын анықтау керек.

Нұсқау: есеп мына $u_t = a^2\Delta u(r,t)$ $0 \le r < R$, $t > 0$ теңдеуді

$|u(0,t)| < \infty$, $u_r(R,0) = 0$, $t \to 0$ $u(r,0) = Ar^2$ $0 \le r < R$,

математикалық есепті шешуге келтіріледі.

37. $\Delta u + ae^{-hz} = 0$ $h > 0$, мұндағы

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},\ |u(0,z)| < \infty,$$

$$u_r(R,z) = 0,\ 0 < z < \infty,\ u(r,0) = Q,\ 0 < r < R$$

(бұл радиусы R шексіз цилиндрдегі газдың таралуы туралы есеп).

38. Жоғарыдағы 37 есептегі теңдеу $|u(r,z)| < \infty$,

$$u_r(R,z) + \delta u(R,z) = 0,$$

$u(r,0) = Q$, $u(R,\infty) = 0$, $0 < r < R$, $z > 0$, шарттарын қанағаттандырғандағы $u(r,z,t)$-газ құбылысын анықтау керек.

Жауаптары

14. $u(x,t)=\frac{2lB}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}e^{\left(-\frac{2k\pi}{l}\right)t}\sin\frac{k\pi}{l}x$.

15. $u(x,t)=A$.

16. $u(x,t)=e^{-\left(\frac{25\pi^2}{4l^2}+4\right)t}\sin\frac{\pi}{2l}x$.

17. $u(x,t)=px+\frac{(B-p)l}{2}-\frac{4l(B-p)}{\pi^2}$.

18.

$u(x,t)=$

$$=\frac{A}{\cos\frac{l}{a}}e^{-t}\sin\frac{x}{a}+\frac{2}{a}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{T}{\omega_k}+\frac{(-1)^k Aa^2}{1-a^2\omega_k^2}\right]e^{-a^2\omega_k^2 t}\sin\omega_k x, 1$$

$$\omega_k=\frac{2k+1}{2l}, \omega_k\neq 1/a, k=0,1,2,\ldots$$

19. $u(r,t)=\frac{2}{Rr}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_0^R r\sin\frac{r}{a}\sin\frac{k\pi r}{R}dr\right]e^{-\left(\frac{ak\pi}{R}\right)^2 t}\sin\frac{k\pi r}{R}$,

нұсқау: $v(r,t)=ru(r,t)$ алмастыру керек.

20.

$u(r,t)=$

$$=e^{-dt}\left\{\frac{A}{8}+\frac{2A}{r}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\sin\frac{R\lambda_k}{2}-R\lambda_k\cos\frac{R\lambda_k}{2}}{2R\lambda_k-\sin 2R\lambda_k}e^{-a^2\lambda_k^2 t}\sin\lambda_k^2 r\right\},$$

мұндағы λ_k мына транцеденттік $tgR\lambda=R\lambda$ теңдеудің теріс емес түбірі.

21. $$u(x,y,t)=Be^{-\frac{a^2\pi^2}{4}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{9}{s^2}\right)t}\sin\frac{\pi x}{2p}\cos\frac{3\pi y}{2s}+$$

$$+\frac{4A}{a^2\pi^2\left(\frac{9}{p^2}+\frac{1}{s^2}\right)}\left[1-e^{-\frac{a^2\pi^2}{4}\left(\frac{9}{p^2}+\frac{1}{s^2}\right)t}\right]\sin\frac{3\pi x}{2p}\cos\frac{\pi y}{2s}.$$

22. $$u(x,t)=xt^2+e^t+\sin t-\cos t+e^{-3t}\cos 2x.$$

23. $$\left[\frac{t}{\mu_1^2}+\mu_1^{-4}\left(e^{-\mu_1^2 t}-1\right)\right]J_0(\mu_1 r).$$

24. $$u(x,y)=\frac{(PA-2v)}{2S}+V-$$

$$-\frac{4pA}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2 sh\frac{(2k+1)\pi s}{p}}\cos\frac{(2k+1)\pi}{p}x\,sh\frac{(2k+1)\pi}{p}y.$$

25. $$u(x,y)=\frac{2sA}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\left[\frac{1}{sh\frac{k\pi s}{p}}sh\frac{k\pi y}{p}\sin\frac{k\pi x}{p}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{sh\frac{k\pi p}{s}}sh\frac{k\pi x}{s}\sin\frac{k\pi y}{s}\right].$$

26. $u(r,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-\frac{(2k+1)\pi x}{2l}} \sin\frac{(2k+1)\pi y}{2l}$,

мұндағы $a_k = \frac{2}{l}\int_0^l e^{-\xi} \sin\frac{(2k+1)\pi\xi}{2l} d\xi$.

27.

$$u(r,\varphi) = -1 - \frac{r}{2R}\cos\varphi + \frac{\pi r}{R}\sin\varphi + 2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2-1}\left(\frac{r}{R}\right)^k \cos k\varphi .$$

28. $u(r,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi)$,

$$a_k = \frac{1}{k\pi r^{k-1}}\int_0^{2\pi} sh\varphi \cos k\varphi d\varphi .$$

$$b_k = \frac{1}{k\pi r^{k-1}}\int_0^{2\pi} sh\varphi \sin k\varphi d\varphi,\ k = 1,2,..$$

29. $u(r,\varphi) = C + \frac{4R^2}{3r}\cos\varphi + \frac{R^3}{4r^2}\cos 2\varphi - \frac{\pi R^3}{r^2}\sin 2\varphi +$

$$+4R\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{4-k^2}\left(\frac{R}{r}\right)^k \cos k\varphi .$$

30.

$$u(r,\varphi) = B + \frac{a^2 A}{a^2+b^2}\left(r - \frac{b^2}{2}\right)\cos\varphi + \frac{b^2 T}{a^4+b^4}\left(r^2 + \frac{a^4}{r^2}\right)\sin 2\varphi;$$

31. $u(r,\varphi) = \frac{4\alpha AR}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\left(\frac{2}{R}\right)^{\frac{k\pi}{\alpha}} \sin\frac{k\pi\varphi}{\alpha}$.

32. $u(r,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{5\overset{0}{\mu}_k t}{l}+B_k\sin\frac{5\overset{0}{\mu}_k t}{l}\right)J_0\left(\frac{\overset{0}{\mu}_k r}{l}\right)$,

$$A_k=\frac{2}{l^2 J_1^2(\overset{0}{\mu}_k)}\int_0^l \rho^{3/2}J_0\left(\frac{\overset{0}{\mu}_k\rho}{l}\right)d\rho,$$

$$B_k=\frac{2}{5l\overset{0}{\mu}_k J_1^2(\overset{0}{\mu}_k)}\int_0^l \rho^{4/3}J_0\left(\frac{\overset{0}{\mu}_k\rho}{l}\right)d\rho,$$

мұндағы $\overset{0}{\mu}_k$ Бессель функциясы $J_0(\mu)=0$ оң түбірлері.

33. $u(r,t)=8BR^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\overset{0}{\mu}_k^{3} J_1(\overset{0}{\mu}_k)}\cos\frac{a\overset{0}{\mu}_k t}{R}J_0\left(\frac{\overset{0}{\mu}_k r}{R}\right)$.

34. $u(r,t)=\frac{2AR}{5}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\overset{0}{\mu}_k^{2} J_1(\overset{0}{\mu}_k)}\sin\frac{5\overset{0}{\mu}_k t}{R}J_0\left(\frac{\overset{0}{\mu}_k r}{R}\right)$.

35. $u(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}M_n e^{-\frac{x_n^2}{a^2 b}t}J_0\left(x_n\frac{r}{a}\right)$, мұндағы $x_n=\chi_n a$, ал χ_n мына $\frac{\alpha}{k}J_0(\chi_n a)-\chi J_1(\chi_n a)=0$ транцендент теңдеудің түбірі,

$$M_n=\frac{2}{a^2(J_0^2(x_n)+J_1^2(x_n))}\int_0^a rf(r)J_0\left(x_n\frac{r}{a}\right)dr.$$

36. $u(r,t)=\frac{AR^2}{2}+4AR^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_k^2 J_0(\mu_k)}e^{-\left(\frac{a\mu_k}{R}\right)^2 t}J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)$.

37. $u(r,z)=Q+\frac{a}{h^2}\left(1-e^{-hz}\right)$.

38. $u(r,z)=\left[\frac{\delta J_0(hr)}{\delta J_0(hr)-hJ1(hR)}-1\right]\frac{Ae^{-hz}}{h^2}+$

$$+2R\delta\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(\mu_k^2+\delta^2R^2)J_0(\mu_k)}\left[Q-\frac{AR^2}{\mu_k^2-h^2R^2}\right]e^{-\frac{\mu_k z}{R}}J_0\left(\frac{\mu_k}{R}r\right),$$

мұндағы μ_k оң шамалар мына $\mu J_0'(\mu)+\delta RJ_0(\mu)=0$ транцедент теңдеудің түбірі.

VI тарау. ИНТЕГРАЛДЫҚ ТҮРЛЕНДІРУ ӘДІСТЕРІ

Анықтама. Ω - аймақта анықталған $f(x)$ функцияның интегралдық түрлендіруі деп

$$F(z)=\int_{\Omega}K(z,x)f(x)dx \tag{6.1}$$

интегралмен анықталған $F(z)$ функциясын айтамыз. Белгілі $K(z,x)$ функция интегралдық түрлендірудің ядросы деп аталады. Интегралды түрлендірулер, негізінен, ядролар мен интегралдану аймақтарымен анықталады. Олардың жиі қолданылатын және қарапайымдары Фурье, Лаплас, Меллин, Ханкель т.б. интегралдық түрлендірулері.

1. Фурьенің интегралдық түрлендірулері. Берілген функция $f(x)\in L(R)$ үшін Фурьенің түрлендіруі:

$$\tilde{f}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\,e^{-i\lambda\xi}d\xi\,, \tag{6.2}$$

ал кері түрлендіру

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(\lambda)\,e^{+i\lambda\xi}d\lambda \tag{6.3}$$

интегралдармен анықталады.

Егер $f(x)$ - тақ функциясы болса, онда (6.2)-(6.3) түрлендіулерден Фурьенің синус түрлендірулері:

$$\tilde{f}_S(\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(\xi)\sin\lambda\xi\,d\xi\,,\ f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\tilde{f}_S(\xi)\sin\lambda x\,dx$$

Ал егерде $f(x)$ - жұп функциясы болса, онда (6.2) - (6.3) түрлендірулерден Фурьенің косинус түрлендірулері:

$$\tilde{f}_C(\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(\xi)\cos\lambda\xi\,d\xi\,,\ f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\tilde{f}_C(\xi)\cos\lambda x\,dx$$

алынады.

Берілген функция $f(x)\in L(R^n)$, онда Фурьенің еселі интегралдық түрлендірулері

$$\tilde{f}(\lambda)=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n}\int_{R^n} f(\xi)\, e^{-i(\lambda,\xi)}d\xi,$$

$$f(x)=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n}\int_{R^n} \tilde{f}(\lambda)\, e^{+i(\lambda,x)}d\lambda \qquad (6.4)$$

өрнектермен анықталады. Мұнда $x=(x_1,x_2,...x_n)$, $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,...\lambda_n)$ және $(\lambda,x)=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+...+\lambda_nx_n$.

2. Лапластың интегралдық түрлендіруі. Нақты немесе комплекс мәнді $f(t)$ функциясы мына шарттарды қанағаттандырса:

1^0. $f(t)\equiv 0,\quad t<0;$

2^0. $f(t)$ функцияның бірінші текті үзіліс нүктелерінің саны ақырлы, қалған $\forall t>0$ мәндерінде үзіліссіз;

3^0. Оң M және s сандары табылып $|f(t)|\le M\,e^{st}$ теңсіздігі орындалса, онда $f(t)$ функциясы *түпнұсқа* деп аталады. Лаплас түрлендіруі

$$F(p)=\int_0^\infty f(t)\,e^{-pt}dt,\quad p=x+iy \qquad (6.5)$$

интегралмен анықталады. Функция $F(p)$ *кескін*, $f(t)$ түпнұсқа деп аталады. Лаплас түрлендіруіне *кері түрлендіру*

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(a+i\eta)t}F(a+i\eta)d\eta,\quad a>s \qquad (6.6)$$

Меллин формуласымен беріледі.

Екі өлшемді Лаплас түрлендіруі

$$F(p_1,p_2)=\int_0^\infty\int_0^\infty f(t_1,t_2)\,e^{-p_1t_1-p_2t_2}dt_1dt_2,\ p_k=x_k+iy_k,\ k=1,2$$

интегралымен, ал оған кері түрлендіру

$$f(t_1,t_2)=-\frac{1}{4\pi^2}\int_{a_1-i\infty}^{a_1+i\infty}\int_{a_2-i\infty}^{a_2+i\infty}F(p_1,p_2)e^{p_1t_1+p_2t_2}dp_1dp_2, \quad a_i>s_i$$

интегралмен анықталады.

3. <u>Ханкельдің интегралдық түрлендіруі.</u> Егер $\sqrt{t}f(t)\in L(0,\infty)$, онда Ханкельдің түрлендіруі

$$f_\nu^*(\lambda)=\int_0^\infty f(t)\,t\,J_\nu(\lambda t)dt, \quad \nu>-\tfrac{1}{2} \tag{6.7}$$

интегралмен, ал кері түрлендіруі

$$f(t)=\int_0^\infty f_\nu^*(\lambda)\,\lambda\,J_\nu(\lambda t)d\lambda \tag{6.8}$$

формуламен анықталады.

4. <u>Меллиннің интегралдық түрлендіруі</u> мына интегралдармен

$$G(p)=\int_0^\infty g(t)\,t^{p-1}dt, \quad Re\,p=a$$

$$g(t)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}t^{-p}G(p)dp$$

анықталады.

5. <u>Ақырлы интегралдық түрлендірулер.</u> Түрлі кординаталар жүйесінде Фурье әдісімен шекаралық есептерді шешкенде меншік мән және меншікті функциялар есебіне келеміз. Меншікті мәндер жиыны санаулы, ал сәйкес меншікті функциялар жиыны $X_k(x)$ салмағы $\rho(x)$ болытын, ортогоналды толық жүйе құрайды.

Белгілі бір кластағы функцияны осы ортогоналдық жүйе $X_k(x)$ бойынша қатарға жіктесе

$$f(x)=\sum_{k=1}^\infty f_kX_k(x), \tag{6.9}$$

онда f_k коэффициенттер мына формула

$$f_k = \int_a^b \rho\, f(x) X_k(x) dx \qquad (6.10)$$

бойынша анықталады. Теңдіктер (6.9), (6.10) арқылы интегралдық түрлендірулердің негізін құрайды. (6.10)-теңдік ақырлы интегралдық түрлендіру болса, онда кері түрлендіру (6.9) қатармен анықталады. Төмендегі түрлендірулер ақырлы интегралдық түрлендірулерге жатады.

1. Ақырлы синус Фурье түрлендіруі:

$$f_k^{(s)} = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\frac{k\pi}{l} x dx, \quad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(s)} \sin\frac{k\pi}{l} x dx.$$

2. Ақырлы косинус Фурье түрлендіруі:

$$f_k^{(C)} = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos\frac{k\pi}{l} x dx, \quad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(C)} \cos\frac{k\pi}{l} x dx$$

3. Ақырлы Ханкель түрлендіруі:

$$f_k^{(\nu)} = \frac{1}{\|J_\nu\|^2} \int_0^l x f(x) J_x\left(\mu_k^\nu \frac{x}{l}\right) dx, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^\nu J_\nu\left(\mu_k^\nu \frac{x}{l}\right),$$

мұнда $\|J_\nu\|^2 = \int_0^l x\, J_\nu^2\left(\mu_k^\nu \frac{x}{l}\right) dx$, μ_k^ν - сандар $J_\nu(x) = 0$ теңдеудің түбірлері.

4. Ақырлы Лежандр түрлендіруі:

$$f(n) = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(t) P_n(t) dt, \quad f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n P_n(t)$$ тағы басқалар.

Ақырлы интегралдық түрлендірулерді пайдаланып, көптеген шекаралық есептерді шешуге болады.

Фурьенің интегралдық түрлендіру әдістерімен мына есептерді шешіңдер:

жарты жазықтық: $-\infty < x < \infty$, $t > 0$;

1. $u_t = a^2 u_{xx}$, $u(x,0) = f(x)$.

2. $u_t = a^2 u_{xx} - hu$, $u(x,0) = f(x)$.

3. $u_t = a^2 u_{xx} + F(x,t), \quad u(x,0) = 0$.

4. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + F(x,t), \quad u(x,0) = u_t(x,0)$.

Ширек жазықтықта: $0 < x < \infty, \quad 0 < t < \infty;$

5. $u_t = a^2 u_{xx}, \quad u(0,t) = 0, \quad u(x,0) = f(x)$.

6. $u_t = a^2 u_{xx}, \quad u(0,t) = \mu(t), \quad u(x,0) = 0$.

7. $u_t = a^2 u_{xx}, \quad u_x(x,0) = \nu(t), \quad u(x,0) = 0$

8. $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad u(0,t) = 0, \quad u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = 0$

9. Жарты жазықтықта Лаплас теңдеуі үшін Дирихле есебі:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < y < \infty,$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u(x,\infty) \to 0.$$

10. Нейман есебі (Лаплас теңдеуі үшін):

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < y < \infty,$$

$$u_y\Big|_{y=0} = \psi(x).$$

Жарты кеңістікте: $-\infty < x, y < \infty, \quad t > 0$

11. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) - hu, \quad u(x,y,0) = f(x,y)$.

12. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + F(x,y,t), \quad u(x,y,0) = 0$.

Ширек кеңістікте: $-\infty < x < \infty, \quad 0 < y, \quad t < \infty$ мына есептерді шешіңіз.

13. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}), \quad u(x,0,t) = \varphi(x,t), \quad u(x,y,0) = 0$.

14. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + F(x,y,t), u(x,0,t) = 0, u(x,y,0) = 0$.

15. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}), u_y(x,0,t) = \psi(x,t), u(x,y,0) = 0$.

16. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + F(x,y,t), u_y(x,0,t) = 0,$

$u(x,y,0) = f(x,y)$

17. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}), \quad 0 < x, y < \infty, \quad 0 < t < \infty,$

$$u_x(0,y,t)=\varphi(y,t), \quad u(x,0,t)=\psi(x,t),$$

Лаплас интегралдық түрлендіруін пайдаланып мына есептерді шешіңдер.

18. $\dfrac{\partial u}{\partial x}-\sin x\dfrac{\partial u}{\partial y}=\sin x \sin y, \quad 0<x,y<\infty, \quad u(x,0)=\cos x$.

19. $u_{xx}-u_y=0, \quad 0<x,y<\infty, u(x,0)=A, \quad u(0,y)=B$.

20. $u_{xx}-u_y+4u=\cos x, \quad 0<x,y<\infty,$

$$u(0,y)=u_x(0,y)=0.$$

21. $u_{xx}-u_y+u+2\sin x=0, \quad 0<x,y<\infty,$

$$u(0,y)=0, \quad u_x(0,y)=1-2e^{-5y}.$$

22. $u_{xx}+u_{yy}=2e^x \sin y, \quad 0<x,y<\infty,$

$$u(0,y)=0, \quad u_x(0,y)=\sin y, \quad u(x,0)=0, \quad u_y(x,o)=xe^x.$$

23. $u_t=a^2u_{xx}, \quad 0<x,t<0,(u_x-hu)_{x=0}=0, \quad u(x,0)=f(x)$.

Ханкельдің интегралдық түрлендіруін пайдаланып мына есептерді шешіңдер.

24. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}\right), \quad 0\le r<\infty, \quad 0<t,$

$$u(r,0)=f(r), \quad 0<r<\infty, \quad u_t(r,0)=0.$$

25. $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}\right), \quad 0<r<\infty, \quad t>0, u(r,0)=f(r)$.

26. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\Delta u(r,\varphi,t), \quad 0<r<\infty, \quad t>0, \quad 0<\varphi<\varphi_0,$

$$u(r,\varphi,0)=f(r,\varphi), \quad u_t(r,\varphi,0)=0, \quad u\big|_{\varphi=0}=u\big|_{\varphi=\varphi_0}=0.$$

27. $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u(r,\varphi,t), \quad 0<r<\infty, \quad t>0, \quad 0<\varphi<\varphi_0,$

$$u(r,\varphi,0)=f(r,\varphi), \quad u|_{\varphi=0}=\left.\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\varphi_0}=0.$$

28. $\Delta u=0, \quad 0<r<\infty, \quad 0<\varphi<\varphi_0, \quad 0<z<\infty,$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0}=\left.\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\varphi_0}=0, \quad u|_{z=0}=f(r,z).$$

29. $\Delta u=0, \quad 0<r<\infty, \quad 0<\varphi<\varphi_0, \quad 0<z<\infty,$

$$u|_{\varphi=0}=u|_{\varphi=\varphi_0}=0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}-hu\right)_{z=0}=f(r,\varphi).$$

30. Жарты кеңістік: $0<r<\infty, \quad 0<\varphi<2\pi, \quad z>0$ аймақта жылудың стационарлық таралу есебін шешіңдер, егерде

a) Шекарада $(z=0)$ температура $f(r)$ белгілі болса;

b) шекарада $(z=0)$ жылу ағыны $q=const, \quad 0<r<R$, ал $q=0, \quad R<r$ берілсе;

c) шекарада $(z=0)$ Ньютон заңы бойынша температурасы $u_0(r)$ ортамен жылу алмасса.

Төмендегі шекаралық есептерді Меллин интегралдық түрлендіруін қолданып шешіңдер.

31. Секторлық аймақта: $0<r<\infty, \quad 0<\varphi<\varphi_0$ Лаплас теңдеуінің шекаралық есептерін шешіңдер, егерде шекарада

a) Шарттар $u(r,0)=0, \quad u(r,\varphi_0)=\psi(r)$ берілсе;

b) шарттар $u_\varphi(r,0)=\psi(r), \quad u(r,\varphi_0)=0$ берілсе;

c) шарттар $(u_\varphi-hu)_{\varphi=0}=0, \quad u_\varphi(r,\varphi_0)=\psi(r)$ берілсе.

Төмендегі шекаралық есептерді ақырлы интегралдық түрлендіру әдісімен шешіңдер.

$\{0<x<l, \quad t>0\}$ аймақта мына шекаралық есептерді шешіңдер:

32. $u_t=a^2u_{xx}, u(x,0)=f(x), u(0,t)=\mu_1(t), u(l,t)=\mu_2(t);$

33. $u_t = a^2 u_{xx} + F(x,t), \quad u(x,0) = 0,$

$$u_x(0,t) = \nu_1(t), \quad u(l,t) = \nu_2(t);$$

34. $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = 0,$

$$u_x(0,t) = \mu_1(t), \quad u_x(l,t) = \mu_2(t);$$

35. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + F(x,t), \quad u(x,0) = u_t(x,0) = 0,$

$$u_x(0,t) = \mu_1(t), \quad u_x(l,t) = \mu_2(t);$$

36. $\dfrac{\partial u_i}{\partial t} = a_i^2 \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}, \quad u_i(x,0) = f_i(x),$

$$\frac{\partial}{\partial x} u_{1x}(0,t) = \mu_1(t), \quad \frac{\partial}{\partial x} u_{2x}(l,t) = \mu_2(t)$$

$$u_1(x_0,t) = u_2(x_0,t), \quad k_1 \left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=x_0} = k_2 \left.\frac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{x=0}, \ i = 1,2.$$

37. $\dfrac{\partial u_i}{\partial t} = a_i^2 \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}, \quad u_i(x,0) = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u_i}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_i(x),$

$$u_1(0,t) = \chi_1(t), \quad u_2(l,t) = \chi_2(t);$$

$$u_1(x_0,t) = u_2(x_0,t), \quad E_1 \left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=x_0} = E_2 \left.\frac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{x=x_0}.$$

$\{0 < x < p, \quad 0 < y < q, \quad t > 0\}$ аймақта мына шекаралық есептерді шешіңдер.

38. $u_t = a^2 \Delta u + F(x,y,t), \quad u(x,y,0) = f(x,y),$

$$u_x(0,y,t) = \psi_1(y,t), u(p,y,t) = \psi_2(y,p),$$

$$u(x,0,t) = \mu_1(x,t), \quad u_x(x,q,t) = \mu_2(x,t).$$

39. $u_{tt} = a^2 \Delta u, \quad u(x,y,0) = f_0(x,y), \quad u_t(x,y,0) = f_1(x,y),$

$$u(0,y,t) = \psi_1(y,t), \quad u(p,y,t) = \psi_2(y,t),$$

$$u_y(x,0,t) = \chi_1(x,t), \quad u_y(x,q,t) = \chi_2(x,t).$$

40. $\Delta u = F(x,y), \quad u(0,y) = \varphi_1(y), \quad u_x(p,y) = \varphi_2(y),$

$$u(x,0)=\psi_1(x), \quad u_y(x,q)=\psi_2(x).$$

41. $\Delta u=0, \quad u_x(0,y)=\varphi_1(y), \quad u(p,y)=\varphi_2(y),$

$$(u_y-hu)_{y=0}=\psi_1(x), \quad u(x,q)=\psi_2(x).$$

42. $\dfrac{\partial u_i}{\partial t}=a_i^2\Delta u_i, u_i(x,y,0)=f_i(x,y), u_1(0,y,t)=u_2(p,y,t)=0;$

$$u_1(x_0,y,t)=u_2(x_0,y,t),$$

$$k_1\left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=x_0}=k_2\left.\frac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{x=x_0}, \quad \left.\frac{\partial u_1}{\partial y}\right|_{y=0}=\left.\frac{\partial u_2}{\partial y}\right|_{y=q}=0.$$

Аймақта $\{0<r<R, \quad 0<\varphi<\varphi_1, \quad t>0\}$ төмендегі шекаралық есептерді шешіңдер:

43. $u_t=a^2\Delta u, \quad u(r,\varphi,0)=f(r,\varphi), \quad u(R,\varphi,t)=\Phi(\varphi,t),$

$$u(r,0,t)=u(r,\varphi_1,t)=0.$$

44. $u_t=a^2\Delta u, \quad u(r,\varphi,0)=f_1(r,\varphi), \quad u_t(r,\varphi,0)=f_2(r,\varphi),$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R}=\Phi(\varphi,t), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0}=\left.\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\varphi_1}=0.$$

45. $u_t=a^2\Delta u+F(r,\varphi,t), \quad u(r,\varphi,0)=0, \quad u(R,\varphi,t)=0,$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0}=\mu_1(r,t), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\varphi_1}=\mu_2(r,t).$$

46. $\Delta u=F(r,\varphi), \quad u(R,\varphi)=\psi(\varphi), \quad 0<\varphi<\varphi_1,,$

$$u(r,0)=0, \quad u(r,\varphi_1)=0.$$

Жауаптары

1 $u(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi)}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi$.

2 $u(x,t)=e^{-ht}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi)}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi$.

3 $u(x,t)=\int\limits_{0}^{t}d\tau\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(\xi,\tau)G(x-\xi,t-\tau)d\xi$.

4 $u(x,t)=\frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{t}d\tau\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}F(\xi,\tau)d\xi$.

5 $u(x,t)=\int\limits_{0}^{\infty}f(\xi)\left[G(x-\xi,t)-G(x+\xi,t)\right]d\xi$.

6 $u(x,t)=2a^2\int\limits_{0}^{t}\mu(\tau)\frac{\partial G}{\partial\xi}\Big|_{\xi=0}d\tau$.

7 $u(x,t)=2a^2\int\limits_{0}^{t}\nu(\tau)G(x,t-\tau)d\tau$.

8. $u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right]$.

9. $u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\frac{y}{(x-\xi)^2+y^2}d\xi$.

10. $u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(\xi)\,ln\left[(x-\xi)^2+y^2\right]d\xi$.

11. $u(x,t)=e^{-ht}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\xi,\eta)G(x-\xi,y-\eta,t)\,d\xi\,d\eta$

12. $u(x,t)=\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(\xi,\eta,\tau)G(x-\xi,y-\eta,t-\tau)\,d\xi\,d\eta$.

13. $u(x,y,t)=\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi,\tau)\frac{\partial}{\partial\eta}G(x-\xi,y-\eta,t-\tau)\,d\xi$.

14. $$u(x,t)=\int_0^t d\tau\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(\xi,\eta,\tau)G(x-\xi,y-\eta,t-\tau)\,d\xi\,d\eta-$$
$$-\int_0^t d\tau\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(\xi,\eta,\tau)G(x-\xi,y+\eta,t-\tau)\,d\xi\,d\eta$$

15. $u(x,y,t)=\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\xi,\tau)G(x-\xi,y,t-\tau)\,d\xi$.

16. $$u(x,t)=\int_0^t d\tau\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(\xi,\eta,\tau)G(x-\xi,y-\eta,t-\tau)\,d\xi\,d\eta+$$
$$+\int_0^t d\tau\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(\xi,\eta,\tau)G(x-\xi,y+\eta,t-\tau)\,d\xi\,d\eta.$$

17. $$u(x,t)=\int_0^t d\tau\int_0^{\infty}\varphi(\eta,\tau)[G(x,y-\eta,t-\tau)-G(x,y+\eta,t-\tau)]\,d\eta+$$
$$+\int_0^t d\tau\int_0^{\infty}\psi(\xi,\tau)\frac{\partial}{\partial y}[G(x-\xi,y,t-\tau)-G(x+\xi,y,t-\tau)]\,d\xi.$$

18. $u=y+\cos x+\cos y$.

19. $u(x,y)=A+(B-A)\operatorname{erf}\frac{x}{2\sqrt{y}}$.

20. $u=\frac{1}{3}(\cos x-\cos 2x)$.

21. $u=e^{-5y}\sin 2x+x\cos x$.

22. $u = xe^x \sin y.$

23. $$u(x,t) = \int_0^\infty f(\xi)[G(x-\xi,t) + G(x+\xi,t)]d\xi -$$

$$- \int_0^\infty f(\xi) 2h \int_0^\infty G(x+\xi+\eta,t) e^{-h\eta} d\eta d\xi.$$

24. $$u(r,t) = \int_0^\infty \lambda \tilde{f}(\lambda) \cos a\lambda t \, J_0(\lambda r) d\lambda, \ \tilde{f}(\lambda) = \int_0^\infty \xi f(\xi) J_0(\lambda\xi) d\xi.$$

25. $$u(r,t) = \int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2 t} \lambda \tilde{f}(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda, \ \tilde{f}(\lambda) = \int_0^\infty \xi f(\xi) J_0(\lambda\xi) d\xi.$$

26. $$u(r,\varphi,t) = \sum_{k=1}^\infty \left(\int_0^\infty \tilde{f}_k(\lambda) \cos a\lambda t \, J_{\nu_k}(\lambda r) d\lambda \right) \sin \nu_k \varphi, \ \nu_k = \frac{k\pi}{\varphi_0},$$

$$\tilde{f}_k(\lambda) = \frac{2}{\varphi_0} \int_0^{\varphi_0} \left(\int_0^\infty \xi f(\xi,\varphi) J_\nu(\lambda\xi) d\xi \right) \sin \nu_k \varphi \, d\varphi.$$

27. $$u(r,\varphi,t) = \sum_{k=0}^\infty \left(\int_0^\infty \tilde{f}_k(\lambda) e^{-a^2\lambda^2 t} \lambda J_{\nu_k}(\lambda r) d\lambda \right) \sin \nu_k \varphi,$$

$$\nu_k = \frac{(2k+1)\pi}{2\varphi_0},$$

$$\tilde{f}_k(\lambda) = \frac{2}{\varphi_0} \int_0^{\varphi_0} \left(\int_0^\infty \xi f(\xi,\varphi) J_\nu(\lambda\xi) d\xi \right) \sin \nu_k \varphi \, d\varphi.$$

28. $$u(r,\varphi,z) = \sum_{k=0}^\infty \left(\int_0^\infty \tilde{f}_k(\lambda) e^{-\lambda z} \lambda J_{\nu_k}(\lambda r) d\lambda \right) \cos \nu_k \varphi,$$

$$\nu_k = \frac{k\pi}{\varphi_0}; \ \tilde{f}_k(\lambda) = \frac{2}{\varphi_0} \int_0^{\varphi_0} \left(\int_0^\infty \xi f(\xi,\varphi) J_\nu(\lambda\xi) d\xi \right) \cos \nu_k \varphi \, d\varphi.$$

29. $u(r,\varphi,z)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^{\infty}\widetilde{f}_k(\lambda)\frac{e^{-\lambda z}}{\lambda+h}\lambda J_{\nu_k}(\lambda r)d\lambda\right)\sin\nu_k\varphi,\ \nu_k=\frac{k\pi}{\varphi_0}$

$$\widetilde{f}_k(\lambda)=\frac{2}{\varphi_0}\int_0^{\varphi_0}\left(\int_0^{\infty}\xi f(\xi,\varphi)J_\nu(\lambda\xi)d\xi\right)\sin\nu_k\varphi\,d\varphi.$$

30.

a) $u(r,z)=\int_0^{\infty}\lambda J_0(\lambda r)e^{-\lambda z}\left(\int_0^{\infty}\xi f(\xi)J_0(\lambda\xi)d\xi\right)d\lambda;$

b) $u(r,z)=\frac{qR}{k}\int_0^{\infty}\frac{e^{-\lambda z}}{\lambda}J_0(\lambda r)J_1(\lambda R)d\lambda;$

c) $u(z,z)=\int_0^{\infty}\lambda\frac{U_0(\lambda)}{\lambda+h}J_0(\lambda r)dr,\ u_0(\lambda)=\int_0^{\infty}u_0(r)\,r\,J_0(\lambda r)dr.$

31.

a) $u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\psi(p)\frac{\sin p\varphi}{\sin p\varphi_0}r^{-p}dp,\ \psi(p)=\int_0^{\infty}\psi(r)r^{p-1}dr;$

b) $u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}u(p,\varphi)r^{-p}dp,\quad \operatorname{Re}p=a,$

$$u(p,\varphi)=-\frac{\psi(p)}{p}tg\,p\varphi_0\cos p\varphi+\frac{\psi(p)}{p}\sin p\varphi;$$

c) $u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}u(p,\varphi)r^{-p}dp,$

$$u(p,\varphi)=\frac{\psi(p)\cos p\varphi}{h\cos p\varphi_0-p\sin p\varphi_0}-h\frac{\psi(p)\sin p\varphi}{hp\cos p\varphi_0-p^2\sin p\varphi_0}.$$

38 $u(x,y,t)=\sum_{k,m=0}^{\infty}u_{km}(t)\cos\nu_k x\sin\omega_m y,\ \nu_k=\frac{(2k+1)\pi}{2p},$

$$\omega_m=\frac{(2m+1)\pi}{2q}$$

$$u_{km}(t)=\frac{4}{pq}\int_0^t e^{-a^2(\nu_k^2+\omega_m^2)(t-\tau)}d\tau\int_0^p\int_0^q F(\xi,\eta,\tau)\cos\nu_k\xi\sin\omega_m\eta\,d\eta\,d\xi+$$

$$+\int_0^t e^{-a^2(\nu_k^2+\omega_m^2)(t-\tau)}d\tau\left\{\frac{2}{p}\int_0^p\left[(-1)^m\mu_2(\xi,\tau)-\omega_m\mu_1(\xi,\tau)\right]\cos\nu_k\xi\,d\xi+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{q}\int_0^q\left[\nu_k\psi_1(\eta,\tau)-(-1)^k\varphi_2(\eta,\tau)\right]\sin\omega_m\eta\,d\eta\right\}.$$

39. $$u(x,y,t)=\sum_{k,m=1}^{\infty}u_{km}(t)\sin\nu_k x\sin\omega_m y,\ \nu_k=\frac{2k\pi}{p},\ \omega_m=\frac{2m\pi}{q},$$

$$u_{km}(t)=\frac{4\cos at\sqrt{\nu_k^2+\omega_m^2}}{pq}\int_0^p\int_0^q f_0(\xi,\eta)\sin\nu_k\xi\cos\omega_m\eta\,d\xi\,d\eta+$$

$$+\frac{4\,sin\,at\sqrt{\nu_k^2+\omega_m^2}}{pq}\int_0^p\int_0^q f_1(\xi,\eta)\,sin\,\nu_k\xi\,cos\,\omega_m\eta\,d\xi\,d\eta+$$

$$+\frac{1}{a\sqrt{\nu_k^2+\omega_m^2}}\int_0^t sin\sqrt{\nu_k^2+\omega_m^2}(t-\tau)*$$

$$*\left\{\frac{2\nu_k}{q}\int_0^q\left[\psi_1(\eta,\tau)-(-1)^k\psi_2(\eta,\tau)\right]cos\frac{m\pi}{q}\eta\,d\eta-\right.$$

$$\left.-\frac{2}{p}\int_0^p\left[\chi_1(\xi,\tau)-(-1)^m\chi_2(\xi,\tau)\right]sin\frac{k\pi}{p}\xi\,d\xi\right\}d\tau.$$

40. $$u(x,y)=\sum_{k,m=0}^{\infty}u_{km}(t)\,sin\,\nu_k x\,sin\,\omega_m y,\ \nu_k=\frac{(2k+1)\pi}{2p},$$

$$\omega_m = \frac{(2m+1)\pi}{2q},$$

$$u_{km}(t) = \left\{ \frac{4}{pq} \int_0^p \int_0^q F(\xi,\eta) \sin\nu_k \xi \sin\omega_m \eta \, d\xi \, d\eta - \right.$$

$$\left. -(-1)^m \frac{2}{p} \int_0^p \psi_2(\xi) \sin\nu_k \xi \, d\xi \right\} \frac{1}{\nu_k^2 + \omega_m^2} +$$

$$+ \frac{2\nu_k}{q} \int_0^q \psi_1(\eta) \sin\omega_m \eta \, d\eta - (-1)^k \frac{2}{q} \int_0^q \psi_2(\eta) \sin\omega_m \eta \, d\eta +$$

$$+ \frac{2}{p} \omega_m \int_0^p \psi_1(\xi) \sin\nu_k \xi \, d\xi$$

41. $u(x,y) = \sum_{k,m=0}^{\infty} u_{km}(t) \cos\nu_k x \, Y_m(y), \quad \nu_k = \frac{(2k+1)\pi}{2p},$

$$Y_m(y) = \omega_m \cos\omega_m y + h \sin\omega_m y, \quad 0 < y < q$$

ω_m - меншікті мәндер $tg\omega_m q = -\frac{1}{n}\omega$ теңдеудің шешулері

$$u_{km}(t) = \frac{1}{\nu_k^2 + \omega_m^2} \left[\frac{1}{\|Y_m\|^2} \int_0^q \varphi_1(\eta) \, d\eta + \frac{(-1)^k \nu_k}{\|Y_m\|^2} \int_0^q \varphi_2(\eta) Y_m(\eta) \, d\eta + \right.$$

$$\left. + \frac{2\omega_m}{p} \int_0^p \psi_1(\xi) \cos\nu_k \xi \, d\xi - \frac{2Y'_m(q)}{p} \int_0^p \psi_2(\xi) \cos\nu_k \xi \, d\xi \right]$$

42. $u(x,y,t) = \sum_{k,m=1}^{\infty} A_{km} e^{-\lambda_{km}^2 t} X_k(x) \cos\omega_m y, \quad \omega_m = \frac{m\pi}{q},$

$$X_k(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin\nu_1 x}{\sin\nu_1 x_0}, & 0<x<x_0,\ \nu_1^2=\dfrac{c_1\rho_1}{k_1}\lambda_{km}^2-\omega_m^2;\\[2mm] \dfrac{\sin\nu_2 x}{\sin\nu_2 x_0}, & x_0<x<p,\ \nu_2^2=\dfrac{c_2\rho_2}{k_2}\lambda_{km}^2-\omega_m^2,\end{cases}$$

λ_{km} - меншікті мәндер $k_1\nu_1 ctg\,\nu_1 x_0=k_2\nu_2 ctg\,\nu_2(l-x_0)$ шешулері,

$$A_{km}=\frac{2}{q\|X_k\|^2}\int_0^p\int_0^q f(\xi,\eta)\mu(\xi,\eta)X_k(\xi)\cos\omega_m\eta\,d\xi\,d\eta,$$

$$\mu(x,y)=\begin{cases}c_1\rho_1, & 0<x<x_0,\ 0<y<q;\\ c_2\rho_2, & x_0<x<p,\ 0<y<q.\end{cases}$$

43. $u(r,\varphi,t)=\sum\limits_{k,n=1}^{\infty}u_{kn}(t)J_{\nu_k}(\lambda_n r)\sin\nu_k\varphi,\ \nu_k=\dfrac{k\pi}{\varphi_1},\ \lambda_n=\dfrac{\mu_n}{R}$,

мұнда μ_n сандар $J_{\nu_k}(x)=0$ теңдеуінің түбірі,

$$u_{kn}(t)=f_{kn}e^{-a^2\lambda_n^2 t}-Ra_1^2\int_0^t\Phi_k(\tau)e^{-a^2\lambda_n^2(t-\tau)}d\tau,$$

$$\Phi_k(t)=\frac{2}{\varphi_1}\int_0^{\varphi_1}\Phi(\varphi,t)\sin\nu_k\varphi\,d\varphi,$$

$$f_{kn}=\frac{2}{\varphi_1\|J_{\nu_k}\|^2}\int_0^{\varphi_1}d\varphi\int_0^R f(r,\varphi)r\,J_{\nu_k}(\lambda_n r)\sin\nu_k\varphi dr.$$

44. $u(r,\varphi,t)=\sum\limits_{k=0,n=1}^{\infty}u_{kn}(t)J_{\nu_k}(\lambda_{nk}r)\cos\nu_k\varphi,\ \nu_k=\dfrac{k\pi}{\varphi_1},\ \lambda_{nk}=\dfrac{\mu_n^{\nu_k}}{R}$,

мұнда $\mu_n^{\nu_k}$ саны $J'_{\nu_k}(x)=0$ теңдеуінің түбірі,

$$u_{kn}(t)=f_{1kn}\cos a\lambda_{nk}t+\frac{f_{2kn}}{a\lambda_{nk}}\sin a\lambda_{nk}t+$$

$$+\frac{a^2 R J_{\nu_k}(\mu_n)}{a\lambda_{nk}}\int_0^t \sin a\lambda_{nk}(t-\tau)\Phi_k(\tau)d\tau,$$

$$\Phi_k(t)=\frac{2}{\varphi_1}\int_0^{\varphi_1}\Phi(\varphi,t)\cos\nu_k\varphi\, d\varphi,$$

$$f_{ikn}=\frac{2}{\varphi_1\left\|J_{\nu_k}\right\|^2}\int_0^{\varphi_1}\cos\nu_k\varphi d\varphi\int_0^R f_i(r,\varphi)r\, J_{\nu_k}(\lambda_n r)dr.$$

45. $u(r,\varphi,t)=\sum\limits_{k=0,n=1}^{\infty}u_{kn}(t)J_{\nu_k}(\lambda_{nk}r)\cos\nu_k\varphi,\ \nu_k=\dfrac{(2k+1)\pi}{2\varphi_1};$

мұнда λ_{kn} саны $J_{\nu_k}(x)=0$ теңдеуінің түбірі

$$u_{kn}(t)=\int_0^t[F_{kn}(\tau)+\mu_n(\tau)]e^{-a^2\lambda_n^2(t-\tau)}d\tau,$$

$$F_{kn}(t)=\frac{2}{\varphi_1\left\|J_{\nu_k}\right\|^2}\int_0^{\varphi_1}\cos\nu_k\varphi d\varphi\int_0^R F(R,\varphi,t)r\, J_{\nu_k}(\lambda_{kn}r)dr,$$

$$\mu_n(t)=\frac{2}{\left\|J_{\nu_k}\right\|^2}\int_0^{\infty}\frac{\mu_1(r,t)-(-1)^k\nu_k\mu_2(r,t)}{2}J_{\nu_k}(\lambda_{kn}r)dr.$$

46.

$$u(r,\varphi)=\left(A_k r^{\nu_k}+\frac{r^{\nu_k}}{2\nu_k}\int_0^r F_k(\rho)\rho^{1-\nu_k}d\rho\right)\sin\nu_k\varphi,\ \nu_k=\frac{k\pi}{\varphi_1},$$

$$A_k=\frac{\psi_k}{R^{\nu_k}}+\frac{1}{2\nu_k}\int_0^R F_k(\rho)\rho^{1-\nu_k}d\rho,$$

$$F_k(r)=\frac{2}{\varphi_1}\int_0^{\varphi_1}F(r,\varphi)\sin\nu_k\varphi d\varphi,\ \ \psi_k=\frac{2}{\varphi_1}\int_0^{\varphi_1}\psi(\varphi)\sin\nu_k\varphi d\varphi.$$

VII тарау. БІРІНШІ РЕТТІ ДЕРБЕС ТУЫНДЫЛЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР

§ 1. Жалпы түсініктер

1-анықтама. Бірінші ретті сызықтық, біртекті дербес туындылы дифференциалдық теңдеу деп

$$X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0 \qquad (7.1)$$

өрнекті айтамыз, мұндағы $X_j = X_j(x_1, x_2, \ldots, x_n), j = 1,2,\ldots,n$ белгілі $\Omega \in R^n$ аймақта анықталған функциялар.

Ал
$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} \qquad (7.2)$$

қысқаша

$$\frac{dx}{dt} = X(x), x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), X = (X_1, X_2, \ldots, X_n) \qquad (7.2')$$

қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесі - жоғарыдағы (7.1)-дербес туындылы дифференциалдық теңдеудің сипаттаушы теңдеулер жүйесі, оның фазалық сызықтары – сипаттамалары деп аталады.

Теорема. $z = z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функциясы (7.2) теңдеулер жүйесінің бірінші интегралы болғанда ғана (7.1) дербес туындылы дифференциалдық теңдеудің шешімі болады.

Коши есебі (7.1)-теңдеуге былай қойылады: (7.1) теңдедің $z(x)|_{\Gamma} = \varphi(x)$ шарты қанағаттандыратын $z = z(x)$ шешімін табу керек, мұндағы Г-аймақ Ω-дағы жатық гипербет, ал $\varphi(x)$ сол Г гипербетте берілген жатық функция. Әдетте Г гипербетті бастапқы гипербет, ал $\varphi(x)$ - бастапқы функция деп аталады. $x \in \Gamma$ нүкте сипаттамаушы деп айтамыз, егер сол нүктеден өтетін сипаттаушы басқа гипербетпен жанаспаса (трансверсалды емес).

Теорема. $x \in \Gamma$ – сипаттамаушы нүкте болсын. Ол кезде (7.1)-теңдеу үшін Коши есебінің жалғыз шешімі болатын x нүктенің төңірегі болады.

Егер Ω аймақта (7.2) сипаттаушы теңдеулер жүйесінің $n-1$ тәуелсіз бірінші интегралдары

$$u_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_j, \quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1 \tag{7.3}$$

болса, онда (7.1) теңдеудің барлық шешімдерін

$$z = \Phi(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}) \tag{7.4}$$

формуламен анықтауға болады, мұндағы Ф – кез-келген дифференциалданатын функция.

2-анықтама. Бірінші ретті сызықтық, біртексіз дербес туындылы дифференциалдық теңдеу деп

$$\sum_{j=1}^{n} X_j \frac{\partial z}{\partial x_j} = X_{n+1} \tag{7.5}$$

өрнегін айтамыз, мұндағы $X_j = X_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(j = 1,\ 2, \ldots,\ n+1)$, $\Omega \in R^n$ аймақтағы белгілі функциялар.

Бұл (7.5)-біртексіз теңдеуге де жоғарыдағы (7.1)-теңдеуге қойылған Коши есебі секілді қойылады.

Кейбір есептердің шешімдері және мысалдар

Теорема. Бастапқы Г беттегі сипаттамаушы x_0 нүктенің өте аз төңірегінде (7.5)-теңдеуге қойылған Коши есебінің жалғыз шешімі болады. Ол шешім

$$z(g(x,t)) = \varphi(x) + \int_0^t X_{n+1}(g(x,\tau))d\tau \tag{7.6}$$

өрнекпен анықталады, мұндағы $g(x,t)$ (бастапқы беттегі $g(x,0)=x$ бастапқы шартпен) сипаттаушы теңдеуінің t момент кезіндегі шешімі.

Ескерту. Бұл келтірілген талдаулардан дербес туындылы теңдеулерді интегралдау қарапайым дифференциалдық теңдеуді интегралдау мәселесін табиғи толықтыратын және ауқымды амал екенін көреміз.

1-мысал. Мына: а) $u = \dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{z^2}$; б) $u = xyz$; в) $u = \dfrac{y}{x} e^{xz/y^2}$

функциялары $x>0$, $y>0$, $z>0$ аймақта

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \tag{7.7}$$

теңдеудің шешімдері болады ма?

Шешуі:

а) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{y^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{2x^2}{y^3}+\frac{2y}{z^2}$, $\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{2y^2}{z^3}$ $\Rightarrow$ (7.7) теңдеу қанағаттанады.

б) $\frac{\partial u}{\partial x}=yz$, $\frac{\partial u}{\partial y}=xz$, $\frac{\partial u}{\partial z}=xy$ $\Rightarrow$ (7.7): $u=3xyz$, бұл $3xyz\neq xyz$,сондықтан $u=xyz$ функция (7.7)-теңдеудің шешімі болмайды.

в) $\frac{\partial u}{\partial x}=\left(-\frac{y}{x^2}+\frac{z}{xy}\right)e^{xy/y^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\left(\frac{1}{x}-\frac{2z}{yz}\right)e^{xy/y^2}$,

$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{y}e^{xy/y^2}$ $\Rightarrow$ (7.7) қанағаттанады, яғни $u=\frac{y}{x}e^{xz/y^2}$ функция (7.7)-теңдеудің шешімі.

2-мысал.
$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0 \qquad (7.8)$$
теңдеуін шешейік.

Бұл теңдеу үшін қарапайым сипаттаушы теңдеу $\frac{dx}{y}=\frac{dy}{-x}$ немесе $xdx+ydy=0$ аламыз, оны интегралдап, $x^2+y^2=C$ интегралын анықтаймыз. Демек жалпы шешімі $z=\Phi\left(x^2+y^2\right)$ болады, бұл Oz өсті айналу беттер жиыны.

3-мысал.
$$x\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=0$$
теңдеуді және $z|_{x=1}=ky$ шартты (x=1 болғанда $z=ky$ түзуге айналатын бет қимасы) қанағаттандыратын бетті анықтау керек.

Шешуі: $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}\Rightarrow xy=C$, демек жалпы шешімі $z=\Phi(xy)$ $\Rightarrow$ $z|_{x=1}=\Phi(y)$.

4-мысал. Мына $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0$ теңдеудің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі: $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}\Rightarrow\frac{x}{z}=C_1, \frac{y}{z}=C_2,$ сондықтан

жалпы шешімі $u=\Phi(\frac{x}{z},\frac{y}{z})$ бұл нөл дәрежелі біртектіліктегі біртекті үш аргументті функциялар жиыны.

5-мысал. Мына біртекті емес $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=1$ теңдеудің $u(x,y)|_{y=1}=x$ шартты қанағаттандыратын шешімін табу керек.

Шешуі: Сипаттаушы теңдеулері $\frac{dx}{dt}=x, \frac{dy}{dt}=y$; бұл

теңдеулердің шешімдері: $x=C_1e^t$, $y=C_2e^t$. Ол

шешімдерден $x=g_1(t,x,y)$, $y=g_2(t,x,y)$ шешімдерін олардың $t=0$ болғандағы мәндері бастапқы бетте, яғни у=1 түзуде жататындай таңдаймыз. Мұндай шешім

$$g_1=e^t x, \quad g_2=e^t$$

болады. Жоғарыдағы (7.6)-формула бойынша белгісіз шешім $u(e^t x,e^t)=x+t$ өрнекті қанағаттандырады. Енді $e^t=y$ деп жалпы шешімге қойсақ, онда $u(xy,y)=x+\ln y$ немесе $u(x,y)=\frac{x}{y}+\ln y$ есептің шешімі болады.

6-мысал. Мына Коши есебін: $y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}=y^2-x^2,$

$u(0,y)=\frac{1}{y^2}$ шешейік.

Шешуі: Сипаттаушы теңдеулері $\frac{dx}{dt}=y, \frac{dy}{dt}=-x \Rightarrow$ шешімдері:

$$x=C_1\sin t+C_2\cos t, \quad y=C_1\cos t-C_2\sin t,$$

мұндағы $C_j=const, \quad j=1,2.$ Бұл теңдеулерден сипаттаушылар t=0 болғанда x = 0, $y(0)$ = y түзуде жататындай таңдаймыз; ол функцияларды $g_1(t,x,y)$, $g_2(t,x,y)$ деп белгілейік. Ал $x(0)$ = 0, $y(0)$ = y шарттардан $C_1=y$, $C_2=0$ анықтап: $g_1(t,x,y)=y\sin t$, $g_2(t,x,y)=y\cos t$. Жоғарыдағы (7.6) формула бойынша, белгісіз $u(x,y,t)$ − Коши есебінің шешімі

$$u(y\sin t, y\cos t)=\frac{1}{y^2}+\int_0^t y^2(\cos^2\tau-\sin^2\tau)d\tau=$$

$$=\frac{1}{y^2}+\int_0^t y^2\cos 2\tau d\tau \qquad \text{болады.}$$

Біртексіз
$$\sum_{j=1}^{n}X_j\frac{\partial z}{\partial x_j}=X_{n+1} \tag{7.9}$$

теңдеу үшін Коши есебі: (7.5)-теңдеудің $x_n=x_n^o$ болғанда $z=z_0(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})$ бастапқы шартты қанағаттандыратын $z=z(x)$ - шешімін табу керек.

Мысалдар: 1) $yp-xq=0$ теңдеудің y=0 болғанда $z=f(x)$ болатын $z=z(x,y)$ белгісіз шешімді табу керек (мұнда және төменде $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, $q=\frac{\partial z}{\partial y}$).

Шешуі: $\frac{dx}{y}=-\frac{dy}{x} \quad \Rightarrow x^2+y^2=C$, жалпы шешім $z=\Phi\left(x^2+y^2\right)$.

Егер $x \sim \psi \sim x^2 + y^2$, онда $z = f\left(\sqrt{\psi}\right)$, сондықтан $z = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$ - есептің шешімі. Бұл есептің геометриялық мағынасы: егер меридиан теңдеуі берілсе, онда айналу бет бірмәнді анықталады.

2) $xzp + yzq + xy = 0$ теңдеудің $xy = a^2$, $z = h$ сызықтан өтетін бет теңдеуі болатын шешімді табу керек.

Шешуі: Қарапайым теңдеулер жүйесі:

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-xz} \Rightarrow \frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} \Rightarrow C_1x = y; \quad \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-xz}$$

$$\Rightarrow \quad ydx + zdz = 0 \Leftrightarrow C_1xdx + zdz = 0, \Rightarrow xy + z^2 = C_2.$$

Есептің шарттарын қолдансақ $a^2 + h^2 = C_2$, демек есеп шешімі $xy + z^2 = a^2 + h^2$.

1. Мына $xyp + y^2p = x$ теңдеуді қанағаттандыратын және $x = a$, $2ayz = a^2 + 2$ қисықтан өтетін бетті табу керек.
2. $x = a$, $y^2 + z^2 = a^2$ қисықтан өтетін $(x^2 + y^2)p + 2xyq = xz$ теңдеуді қанағаттандыратын бетті табу керек.
3. $x = 1$, $z = y^2$ - қисықтан өтетін $zp - zq = y - x$ теңдеуді қанағаттандыратын бетті табу керек.
4. $\left.\begin{aligned} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \end{aligned}\right\}$ шеңберден өтетін, $2xzp + 2yzq = z^2 - x^2 - y^2$ теңдеуді қанағаттандыратын бетті табу керек.
5. Мына $z(x + z)p - y(y + z)q = 0$ теңдеуді қанағаттандыратын, $x = 1$ болғанда $z = \sqrt{y}$ шамаға айналатын шешімді табу керек.

Мына теңдеулердің жалпы шешімдерін табу керек:

6. $\cos y \cdot p + \cos x \cdot q = \cos x \cos y$.

7. $xzp + yzq = x$.

8. $xp + (y - \sqrt{R^2 - z^2})q = 0$.

9. $y^3 q - xy^2 p = axz$.

10. $y^2 p + xyq = xz$.

11. $xz^4 p + yz^4 q = x^2 y^2$.

12. $xy\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\ \dfrac{\partial z}{\partial y} + x(1 + x^2) = 0$.

13. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = xy + z$.

14. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2xy\sqrt{a^2 - z^2}$.

15. $(x^2 + y^2)\dfrac{\partial u}{\partial z} = y^2 + z^2$.

16. $(y + x)\dfrac{\partial z}{\partial x} + (y - x)\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$.

17. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z - x^2 - y^2$.

18. Мына $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + z\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$ теңдеудің:

a) $u(1, y, z) = y^2 + z^2$;

b) $u(x, y, z)\big|_{y^2 + z^2 = 2} = \dfrac{2}{x^2}$

шарттарды қанағаттандыратын шешімдерін анықтаңыз.

§ 2. Коши есебі

Берілген дербес туындылы сызықтық I-ретті дифференциалдық (7.1) теңдеуді $x_n = x_n^0$ мәніндегі, яғни $z = v(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ болатын шешімін табу керек.

1-мысал. $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ теңдеуді y=0 нүктедегі $z = f(x)$ болатын шешімін табу керек.

Шешуі: берілген теңдеуге эквивалент $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}$ қарапайым теңдеудің жалпы шешімі $x^2 + y^2 = C$, яғни $z = \varphi(x^2 + y^2)$ өрнектен y=0 болғанда $z = \varphi(x^2)$ болатын $z = f(\sqrt{\varphi}) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ шешімін табамыз.

2-мысал. Мына $xy = a^2$, $z = h$ сызықтан өтетін және $xz\frac{\partial z}{\partial x} + yz\frac{\partial z}{\partial y} + xy = 0$ теңдеуді қанағаттандыратын бетті анықтаңыз.

Шешуі: берілген дербес туындылы теңдеуге сәйкес қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесін құрамыз: $\frac{\partial x}{xz} = \frac{\partial y}{yz} = -\frac{\partial z}{xz}$, ал бұдан $C_1 = \frac{y}{x}$, $C_2 = xy + z^2$.

Енді шарттарды пайдалансақ $C_2 = a^2 + h^2$, демек $xy + z^2 = a^2 + h^2$ есептің шешімі болады.

Мына Коши есептерін шешіңіз:

19. Мына $x = a$, $2ayz = a^2 + 2$ сызықтан өтетін және $xy\frac{\partial z}{\partial x} - y^2\frac{\partial z}{\partial y} = x$ теңдеуді қанағаттандыратын беттің теңдеуін анықтаңыз.

20. $x=1, \quad z=y^2$ сызықтан өтетін және $z\dfrac{\partial z}{\partial x}-z\dfrac{\partial z}{\partial y}=y-x$ теңдеуді қанағаттандыратын беттің теңдеуін анықтаңыз.

21. $x=a, \quad y^2+z^2=a^2$ сызықтан өтетін және $\left(x^2+y^2\right)\dfrac{\partial z}{\partial x}+2xy\dfrac{\partial z}{\partial y}=xz$ теңдеуді қанағаттандыратын беттің теңдеуін анықтаңыз.

22. Мына шеңбер арқылы $x+y+z=0, \quad x^2+y^2+z^2=a^2$ өтетін және $2xz\dfrac{\partial z}{\partial x}+2yz\dfrac{\partial z}{\partial y}=z^2-x^2-y^2$ теңдеуді қанағаттандыратын беттің теңдеуін табыңыз.

23. $z=h, \quad x^2+y^2=a^2$ шеңбер арқылы өтетін және $x\left(x^2+y^2\right)\dfrac{\partial z}{\partial x}+2y^2\left(x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}-z\right)=0$ теңдеуді қанағаттандыратын беттің теңдеуін анықтаңыз.

24. $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}=xyz$, $u(0,y,z)=y-x$.

25. $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=2xy$, $u(x,x)=x^2$.

26. $xu\dfrac{\partial u}{\partial x}+yu\dfrac{\partial u}{\partial y}+xy=0$, $u(x,y)\big|_{xy=1}=1$.

27. $\left(x-2e^y\right)\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$, $u(x,0)=x$.

28. $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+2\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$, $u(z,1,z)=xz$.

29. $xy\frac{\partial u}{\partial x}+x^2\frac{\partial u}{\partial y}=0$, $u(x,0)=x^2$.

§ 3. Бірінші ретті сызықтық теңдеулер жүйесі.

Сызықтық 1-ретті теңдеулер жүйесі кез келген x^1, x^2, ... , x^n координата жүйесінде

$$f_1\left(x^1,x^2,...,x^n\right)=0,\ f_2\left(x^1,x^2,...,x^n\right)=0,...,f_s\left(x^1,x^2,...,x^n\right)=0 \quad (7.10)$$

теңдеулерімен берілсін. Бұл теңдеулердің барлық df_i $(i=1,2,...,s)$ дифференциалдық формалары өзара сызықтық тәуелсіз және

$$\left(f_i,f_j\right)=0,\quad i,j=1,2,...,s \quad (7.11)$$

болсын; мұндай теңдеулер жүйесін, әдетте, тұйық деп атайды (В.И. Смирнов. Курс высшей математики. Т IV, С. 362-377).

Егер операторлар арқылы құрылған Пуассон жақшасы нөлге тең болса, яғни

$$\left(X_i,X_j\right)\equiv 0,\quad i,j=1,2,...,s \quad (7.12)$$

онда жүйені Якобилық деп атайды.

Немесе, егер

$$\left(X_i,X_j\right)\equiv A_1^{(i,j)}X_1(z)+A_2^{(i,j)}X_2(z)+...+A_m^{(i,j)}X_m(z), \quad (7.13)$$

$$i,j=1,2,...,m$$

ондай жүйені тұйық деп атайды.

Сондықтан берілген теңдеулер жүйесінің алдымен тұйық немесе тұйық еместігін тексеру лазым; ал жүйе тұйық болмаса, оны тұйық жүйеге келтіру мәселесімен де шұғылдану керек.

Біз төмендегі есептерде ыңғайлы болуы үшін $\frac{\partial z}{\partial x_i}=P_i$ деп белгілеу енгіздік.

Егер теңдеулер жүйесі

$$f=f\left(x_1,x_2,...,x_n;P_1,P_2,...,P_n\right),$$

$$F=F\left(x_1,x_2,...,x_n;P_1,P_2,...,P_n\right)$$

біртекті түрінде берілсе, онда Пуассон жақшасы

$$[f,F]=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial f}{\partial P_k}-\frac{\partial f}{\partial P_k}\frac{\partial f}{\partial x_k}\right]$$

болады.

Егер бұл жақшалар нөлге тең болса, онда теңдеулер жүйесі тұйық (тола), оның шешімі бар (жүйе Якобилық).

1-мысал.

$$\begin{cases} P_1+x_1x_3P_4=0, \\ P_2+x_2x_3P_4=0, \\ 2P_3+\left(x_1^2+x_2^2\right)P_4=0 \end{cases}$$

теңдеулер жүйесін қарастырайық.

Шешуі: алдымен жүйенің тұйықтығын тексерейік. Ол үшін Пуассон жақшаларын құрастырамыз:

$$(X_1,X_2)=1\cdot 0+x_1x_3\cdot 0-(1\cdot 0+x_2x_3\cdot 0)=0,$$

$$(X_1,X_3)=1\cdot x_1\cdot P_4+x_1x_3\cdot 0-\left(1\cdot x_1\cdot P_4+\frac{x_1^2+x_2^2}{2}\cdot 0\right)=0,$$

$$(X_2,X_3)=1\cdot x_2\cdot P_4+x_2x_3\cdot 0-\left(1\cdot x_2\cdot P_4+\cdot\frac{x_1^2+x_2^2}{2}0\right)=0.$$

демек теңдеулер жүйесі тұйық, яғни Якобилық.

Енді 1-теңдеуді $P_1+x_1x_3P_4=0$ интегралдайық, яғни бұған сәйкес

$$\frac{dx_1}{1}=\frac{dx_2}{0}=\frac{dx_3}{.0}=\frac{dx_4}{x_1x_3}$$

қарапайым теңдеулер жүйесін құрамыз; бұл соңғы жүйені шешіп

$x_2=C_2,\quad x_3=C_3;\quad \dfrac{dx_1}{1}=\dfrac{dx_4}{x_1x_3}$ теңдеуден

$$dx_4-x_1x_3dx_1=0 \quad\Rightarrow\quad x_4-\tfrac{1}{2}x_1^2\cdot x_3=C_4$$

олай болса, теңдеу шешімі

$$x_2 = C_2,$$
$$x_3 = C_3,$$
$$x_4 - \frac{1}{2}x_1^2 \cdot x_3 = C_4.$$

Бұл жерде біз айнымалылар үшін x_1, x_2, x_3, y_4 шамаларды аламыз, себебі

$$X_2(y_4) = x_2 x_3,\ X_3(y_4) = -\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \quad \text{немесе} \quad X_3(y_4) = \frac{1}{2}x_2^2.$$

Онда жаңа айнымалылар үшін жаңа теңдеулер жүйесі

$$Y_1(z) = q_1 = 0,$$
$$Y_2(z) = q_1 + x_2 x_3 q_4 = 0,$$
$$Y_3(z) = q_3 + \frac{x_1^2}{2} q_4.$$

Екінші теңдеуді, яғни $q_2 + x_2 x_3 q_4 = 0$ өрнекті интегралдап

$$\frac{dx_2}{1} = \frac{dx_3}{0} = \frac{dy_4}{x_2 x_3}$$

оның $x_3 = C_3;\ y_4 - \frac{1}{2}x_2^2 \cdot x_3 = C_4$ интегралдарын анықтаймыз. Бұл өрнектерден $x_3 t_4 = y_4 - \frac{1}{2}x_2^2 \cdot x_3$.

Енді тағы да айнымалылар үшін x_1, x_2, x_3, t_4 шамаларды аламыз, себебі $Y_3\left(y_4 - \frac{1}{2}x_2^2 x_3\right) = -\frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}x_2^2 = 0$;

сонымен жаңа жүйе $r_1 = 0$, $r_2 = 0$, $r_3 = 0$ болады. Бұл жүйені $z = t_4$ қанағаттандырады. Бұдан кейін бұрынғы (ескі) айнымалыларға өтсек, яғни

$$z = t_4 = y_4 - \frac{1}{2}x_2^2 x_3 = x_4 - \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}x_3.$$

Сонымен теңдеулер жүйесінің шешімдерінің біреуі үшін

$$z = x_4 - \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} x_3,$$

ал жалпы шешімі

$$z = \omega\left(x_4 - \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} x_3 \right).$$

Мына теңдеулер жүйесін интегралдаңдар

30. $\begin{cases} x_1 P_1 - x_2 P_2 + x_3 P_3 - x_4 P_4 = 0, \\ x_3 P_1 + x_4 P_2 - x_1 P_3 - x_2 P_4 = 0. \end{cases}$

31. $\begin{cases} x_1 P_1 + x_2 P_2 - x_3 P_3 - x_4 P_4 = 0, \\ x_3 P_1 + x_4 P_2 + x_1 P_3 - x_3 P_4 = 0. \end{cases}$

32. $\begin{cases} P_1 + (x_2 + x_4 - 3x_1)P_3 + (x_3 + x_1 x_2 + x_1 x_4)P_4 = 0, \\ P_2 + (x_3 x_4 - x_2)P_3 + (x_1 x_3 x_4 + x_2 - x_1 x_2)P_4 = 0. \end{cases}$

33. $\begin{cases} P_1 + P_2 - P_3 = 0, \\ x_3 P_1 + x_3 P_2 + x_1 P_3 = 0. \end{cases}$

34. $\begin{cases} P_1 + x_1 x_3 P_4 = 0, \\ P_2 + x_2 x_3 P_4 = 0, \\ 2P_3 + (x_1^2 + x_2^2)P_4 = 0. \end{cases}$

Егер теңдеулер жүйесі біртексіз, яғни оң жағы нөлге тең болмаған жүйе, мәселен, $f = f(x_1, x_2, ..., x_n, z, P_1, P_2, ..., P_n)$ және $F = F(x_1, x_2, ..., x_n, z, P_1, P_2, ..., P_n)$ болса, онда Пуассон жақшасы

$$[f, F] = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\partial f}{\partial x_k} \left(\frac{\partial F}{\partial x_k} + P_k \frac{\partial F}{\partial z} \right) - \frac{\partial F}{\partial P_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} + P_k \frac{\partial f}{\partial z} \right) \right]$$

өрнектелуі керек.

Ал теңдеулер жүйесі тұйық болуы үшін кез келген Якоби жақшасы

$$\left[X_i, X_j\right] = A_1 X_1(z) + A_2 X_2(z) + \ldots + A_m X_m(z) = 0, \quad i, j = 1,2,\ldots,m$$

болуы керек, сонда теңдеулер жүйесі шешіледі.

2-мысал.

$$\begin{cases} P_1 - P_3 = z, \\ P_2 - P_3 - x_3 = z \end{cases}$$

жүйені интегралдау керек.

Шешуі: алдымен жүйенің тұйықтығын тексерейік, ол үшін:

$$[f, F] = 1 \cdot (-P_1) - 1(-1 - P_3) - 1(-P_2) + 1(-P_3) = -P_1 + P_2 + 1 = 1 + x_3$$

демек жүйенің бұл түрінің шешімі жоқ.

Енді бұл жүйені жаңа $V(x_1, x_2, x_3, z) = 0$ функция түрінде іздейміз, онда берілген теңдеулер жүйесін

$$\frac{\partial z}{\partial x_k} = -\frac{\partial V/\partial x_k}{\partial V/\partial z}, \quad \frac{\partial V}{\partial x_k} = q_k, \quad , \frac{\partial V}{\partial z} = q$$

жүйемен алмастырамыз, мұндағы $P_k = \frac{q_k}{q}$. Олай болса жаңа жүйе

$$\bar{f} = q_1 - q_3 + zq = 0,$$

$$\bar{F} = q_2 - q_3 + (z + x_3)q = 0.$$

Бұл жүйе үшін Пуассон жақшасы

$$[f, F] = 1 \cdot 0 - 1 \cdot q + zq - 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - (z + x_3)q = -q(1 + x_3),$$

ал $q \neq 0$ болғандықтан $1 + x_3 = 0$, демек жүйе шешілмейді.

35. Мына жүйені тексеріп, шешілетін болса интегралдаңыз:

$$\begin{cases} 2P_1 = (x_3 + z)(P_3 - 1), \\ 2P_2 = (x_3 - z)(P_3 + 1). \end{cases}$$

Мына екі есептің шешімдер ішінен $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ болғанда $z = x_4$ болатын шешімін таңдаңыз:

36. $P_1 - P_2 = z, \quad P_2 - P_3 - x_3 = z$;

37. $\begin{cases} P_1 + P_2 - P_3 - P_4 = 0, \\ P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3 + P_4x_4 = 0. \end{cases}$;

38. $P_1x_1 + P_3x_2 = z, \quad P_2 + P_3z + z = x_1$;

39. $P_1 - P_2 + 2x_2P_3 = 0, \quad x_1x_2P_1 - x_2^2P_2 - P_3 = 0$.

§ 4. Дербес туындылы сызықсыз I-ретті дифференциалдық теңдеу үшін Коши есебі

Берілген

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{7.14}$$

сызықсыз теңдеудің

$$x_0 = x_0(s), \quad y_0 = y_0(s), \quad z_0 = z_0(s) \tag{7.15}$$

нүктеден өтетін $z = z(x, y)$ интегралдық бетті табу, яғни (7.14) - сызықтық теңдеуі үшін Коши есебін шешу мәселесі

$$x = x(t, s), \quad y = y(t, s), \quad z = z(t, s) \tag{7.16}$$

бір параметрлік (s-параметр) характеристикалық қисықтар жиынынан анықтауға келтіріледі.

Есепті шешу үшін алдымен бірнеше параметрлерге тәуелді характеристикалар жиынын анықтап, олардан (7.15) сызықтық нүктелерінен өтетін және қосымша шарттарды қанағаттандыратын бір параметрлік (7.16)-тәріздес жиынды анықтайды. Міне осы қисықтарда жататын нүктелер жиыны анықтауға тиісті бет болады.

Мысал. Мына $x_1 = 0, \quad z = (1 + x_2)^2$ сызықтан өтетін және $P_1^2 - P_2^2 = 2z$ теңдеуді қанағаттандыратын беттің теңдеуін анықтайық.

Шешуі. $P_2 = a_1 P_1$ деп алсақ берілген теңдеуді $P_1^2 - a_1^2 P_1^2 = 2z$ түрінде жазамыз; бұдан $P_1 = \pm\sqrt{\frac{2z}{1-a_1^2}}$; олай болса $P_2 = \pm a_1\sqrt{\frac{2z}{1-a_1^2}}$.

Демек $dz = P_1\, dx_1 + P_2 dx_2 = \sqrt{\frac{2z}{1-a_1^2}}(dx_1 + a_1 dx_2) \quad \Rightarrow$

$$\frac{dz}{\sqrt{z}} = \sqrt{\frac{2}{1-a_1^2}}(dx_1 + a_1 dx_2) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{z}}{1/2} = \sqrt{\frac{2}{1-a_1^2}}(x_1 + a_1 x_2) + a_2 \Rightarrow$$

$$\sqrt{2z} = a_2 + \frac{1}{\sqrt{1-a_1^2}}(x_1 + a_1 x_2). \qquad (7.17)$$

Бұдан егер $x_1 = 0$ болса, онда $z_0 = (1 + x_2)^2$; олай болса

$$\sqrt{2}(1 + x_2) = a_2 + \frac{a_1 x_2}{1-a_1^2} \quad \Rightarrow a_2 = \sqrt{2}(1 + x_2) - \frac{a_1 x_2}{1-a_1^2}.$$

Бұл a_2 шаманы (7.17) өрнекке қойсақ

$$\sqrt{z} = 1 + x_2 + x_1\frac{a}{\sqrt{2}}$$

шешімін аламыз.

Мына сызықсыз теңдеулер үшін берілген есептерді шешіңіз:

40. Мына $P_1\, x_1 + P_2\, x_2 + z = 0$ теңдеудің толық интегралын табыңыз.
41. Мына $x_1 = 0$, $2z = x_2^2$ параболадан өтетін және мына $2z = 2P_1 x_1 + 2P_2 x_2 - P_2^2$ теңдеуді қанағаттандыратын беттің теңдеуін анықтаңыз.
42. Мына $z = P_1\, x_1 + P_2\, x_2 + P_1^3$ теңдеуді интегралдаңыз.
43. $P_1\, P_2 = x_1 + x_2$ теңдеуді интегралдаңыз.

44. $P_1^2 + P_2^2 = z^2$ теңдеуді интегралдаңыз.

Мына Коши есептерін шешіңіз:

45. $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = xyz$, $u(0, y, z) = y - x$.

46. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 2xy$, $u(x, x) = x^2$.

47. $xu\frac{\partial u}{\partial x} + yu\frac{\partial u}{\partial y} + xy = 0$, $u(x, y)|_{xy=1} = 1$

48. $(x - 2e^y)\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $u(x, 0) = x$.

49. $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + 2\frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u(z, 1, z) = xz$.

50. $xy\frac{\partial u}{\partial x} + x^2\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $u(x, 0) = x^2$.

Жауаптары

1. $2xyz - x^2 = 2$.
2. $z^2 = x^2 - y^2$.
3. $z^2 = 2xy - 2(x + y - 1) + (x + y - 1)^2$.
4. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2a^2(x^2 + y^2 + xy)$.
5. $z = x^2y$, $z^2 = xy$.
6. $z = \sin y + F(\sin x - \sin y)$.
7. $z^2 = 2x + F\left(\frac{y}{z}\right)$.
8. $\sqrt{R^2 - z^2} = y + xF(z)$.
9. $3y^2 \ln z + ax = y^2 F(xy)$.
10. $z = yF(x^2 - y^2)$.

11. $4z^5 = 5x^2y^2 + F\left(\frac{y}{x}\right)$.

12. $xyz = -x^4 - 2x^2 + F(x,y)$.

13. $z = xy + xF\left(\frac{y}{x}\right)$.

14. $z = a\sin\left[xy + F\left(\frac{y}{z}\right)\right]$.

15. $z[y - xF(y)] = y^2F(y) + xy$.

16. $z = rF(\ln r + \varphi)$.

17. $z + x^2 - y^2 = xF\left(\frac{y}{x}\right)$.

18.

a) $u(x,y,z) = \frac{z^2 + y^2}{x^2}$.

b) $u(x,y,z) = \frac{z^2 + y^2}{x^2}$.

19. $2xyz - x^2 = 2$.

20. $z^2 = 2xy - 2(x + y - 1) + (x + y - 1)^2$.

21. $z^2 = x^2 - y^2$.

22. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2a^2(x^2 + y^2 + xy)$.

23. $(x^2 + y^2)(a^2z^2 - h^2y^2) = a^2hx^2z$.

24. $u(x,y,z) = y - z + \frac{z^4}{4} + \frac{x^2}{3}(y + z - 2x) + (y - x)(z - x)\frac{x^2}{2}$.

25. $u(x,y) = xy + f\left(\frac{y}{x}\right)$.

26. $u(x,y) = \sqrt{2 - xy}, \quad xy < 2$.

27. $u(x,y)=xe^{y}-e^{2y}+1$.

28. $u(x,y,z)=(1+x-y)(2-2y-z)$.

29. $u(x,y)=x^2-y^2-\ln\sqrt{1-\dfrac{y^2}{x^2}}$.

30. $z=\omega(x_4x_1-x_2x_3, x_2x_2+x_3x_4)$.

31. $z=C$.

32. Нұсқау: Пуассон жақшасы үшінші $P_3+x_1P_4=0$ теңдеуді береді, нәтижеде толық үш теңдеу жүйесі шешіледі:

$$u=\omega\left(x_4-x_1x_3-\frac{x_2^2}{2}-x_1\right).$$

33. Жоғарыдағы 3.3. секілді шешіледі.

34. $z=\omega(2x_4-x_1^2x_3-x_2^2x_3)$.

35. $\omega\left[e^{x_1}(z-x_3), e^{x_2}(z-x_3)\right]=0$.

36. Шешімі жоқ.

37. $z=\varphi\left(\dfrac{x_1+x_3}{x_2-x_1}, \dfrac{x_1+x_4}{x_2-x_1}\right)$.

38. $z=1+\varphi\left(x_1e^{-x_2}\right)$.

39. $z=C$.

40. $x_1x_2z=a_1x_2+a_2x_1$.

41. $2z=x_1+x_2^2$.

42. Толық интеграл: $z=ax_1+bx_2+a^3$.

43. Толық интеграл: $3z=3a(x_1-x_2)+2(a^2+x_1+x_2)+C$.

44. Толық интеграл: $ax_1+bx_2+\ln zx\sqrt{a^2+b^2}=1$.

45. $u(x,y,z)=y-z+\dfrac{z^4}{4}+\dfrac{x^2}{3}(y+z-2x)+(y-x)(z-x)\dfrac{x^2}{2}$.

46. $u(x,y)=xy+f\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

47. $u(x,y)=\sqrt{2-xy}, \quad xy<2$.

48. $u(x,y)=xe^{y}-e^{2y}+1$.

49. $u(x,y,z)=(1+x-y)(2-2y-z)$.

50. $u(x,y)=x^{2}-y^{2}-\ln\sqrt{1-\frac{y^{2}}{x^{2}}}$

ӘДЕБИЕТТЕР

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М., 1967.
2. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М., 1976.
3. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М., 1970.
4. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., 1977.
5. Гюнтер Н.М., Кузьмин Р.О. Сборник задач по высшей математике. М.Л., 1947.
6. Сборник задач по уравнениям математической физики. Под ред. В.С.Владимирова. М., 1974.
7. Смирнов М.М. Сборник задач по уравнениям математической физики.
8. Бицадзе А.В., Калиниченко Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. М., 1985.
9. Михлин С.Г. Интегральные уравнения.
10. Сахаев Ш.С., Тулегенова М.Б. Методическая разработка лабораторных работ по уравнениям математической физики (часть II), Алматы, 2000, 50 стр.
11. Сахаев Ш.С., Тулегенова М.Б. Математикалық физика теңдеулеріне есептер шығару практикумы. Оқулық, Алматы, 2001. 98 бет.

Оқу басылымы

Мамажан Орынбасарұлы Орынбасаров
Шәріпхан Сахайұлы Сахаев

МАТЕМАТИКАЛЫҚ ФИЗИКА ТЕҢДЕУЛЕРІНІҢ ЕСЕПТЕРІ МЕН ЖАТТЫҒУЛАР ЖИНАҒЫ

ИБ №1860
Басылуға 24.01.2003 ж. қол қойылды. Формат 60 х 84 1/16. Көлемі 11,75 б.т
Офсетті қағаз. RISO басылысы. Тапсырыс № 2205. Таралымы 500 дана. Бағасы келісімді
Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университетінің "Қазақ университеті" баспасы
Алматы қаласы, әл-Фараби даңғылы, 71.

"Қазақ университеті" баспаханасында басылды.